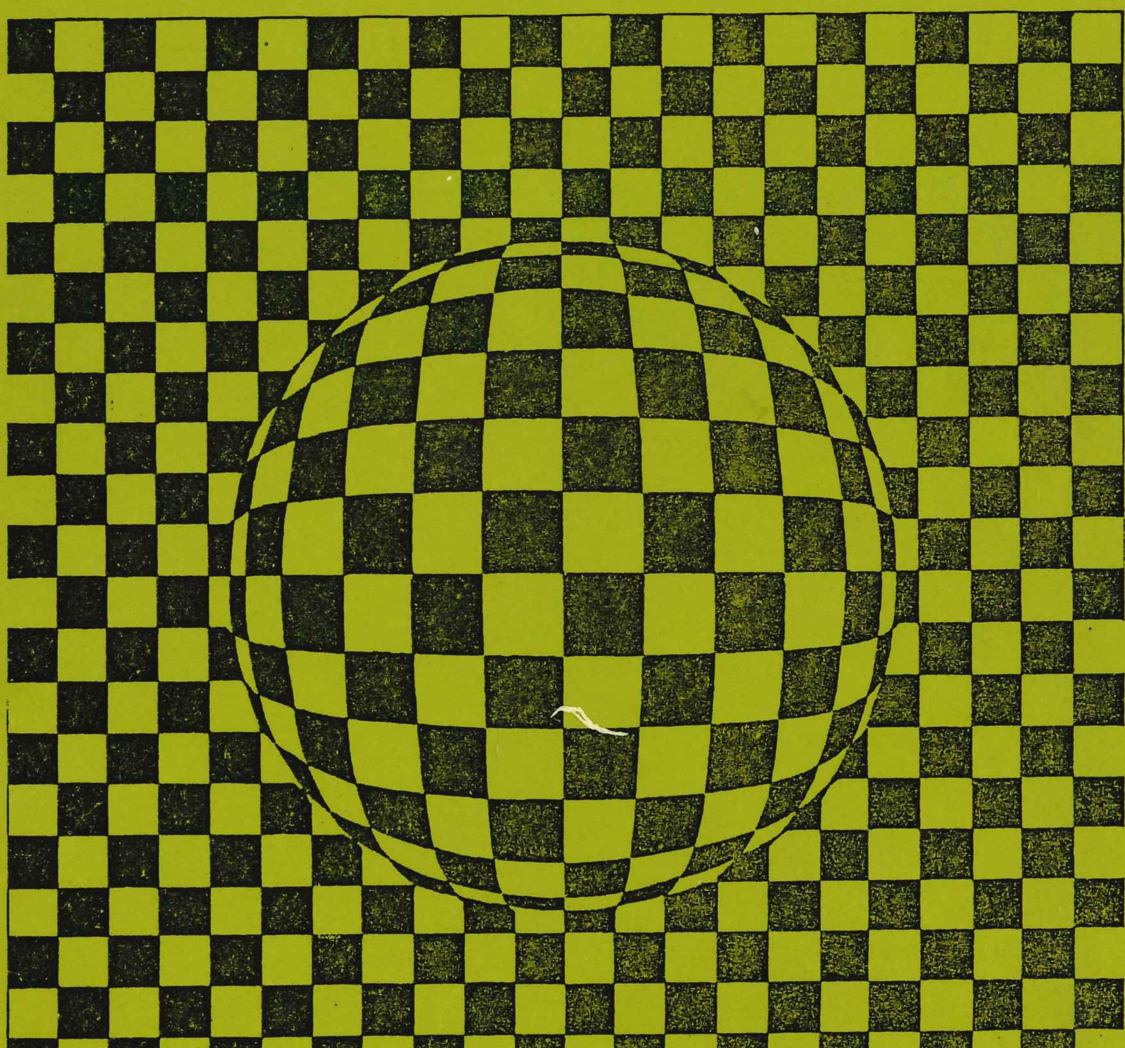
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

CONTRIBUTIONS A L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE CONTEMPORAIN :

Analyse des contenus, méthodes, progressions relatifs aux principaux thèmes des programmes.

La Proportionnalité
Le Calcul Numérique



cndp

C.R.D.P. STRASBOURG

PRÉFACE

L'un des points les plus délicats du métier de professeur est, pour chaque concept fondamental, de bien situer le travail d'une classe dans la continuité d'un apprentissage et d'une progression s'étalant sur plusieurs années et parfois sur plusieurs cycles. Cela exige une vue d'ensemble des contenus et des finalités des programmes, ainsi qu'une analyse approfondie des difficultés auxquelles se heurtent la majorité des élèves.

C'est pourquoi on ne saurait être trop reconnaissant à la COPREM, dont on sait le rôle essentiel qu'elle a joué dans l'élaboration des nouveaux programmes de mathématiques, d'avoir aussi entrepris une étude "longitudinale" de deux thèmes majeurs, la proportionnalité et le calcul numérique. La COPREM n'a pas voulu, en l'occurence, faire œuvre normative, mais provoquer la réflexion, suggérer des scénarios, des exemples, des rapprochements ; à chacun ensuite d'adapter ce riche matériau à son tempérament propre... et à ses élèves.

L'étude sur la proportionnalité décrit des démarches vers l'acquisition d'une notion qui est sans doute la plus importante de toutes. Elle met aussi en lumière le fait que l'assimilation d'une notion et la conquête de sa maîtrise opératoire amène un approfondissement de ses champs d'application, c'est-à-dire, ici, de tout le domaine numérique et de nombreux domaines des autres sciences et de la vie pratique. Les mathématiques apparaissent ainsi moins comme un savoir que comme un outil pour la résolution des problèmes.

L'introduction des calculettes modifie de façon irréversible les habitudes prises dans le domaine numérique. Qu'on le regrette ou qu'on s'en réjouisse, il s'agit là d'un fait qu'aucun enseignant ne peut laisser de côté. Le professeur doit maintenant faire avancer de façon coordonnée les trois types de calcul, calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine et faire sentir leur complémentarité. Le texte de la COPREM dégage de façon très convaincante cette situation nouvelle issue de l'apparition des calculatrices, situation qui amène à mettre l'accent sur le sens de l'organisation des opérations, permet à l'élève d'être moins souvent un simple exécutant et privilégie la conception, les enchaînements, les vérifications.

Bien d'autres études fondées sur le même principe de réflexion sur un grand thème recouvrant plusieurs années de scolarité mériteraient d'être entreprises, ne serait-ce que sur la géométrie dans l'espace, l'algorithmique, la statistique, etc. L'essentiel est que le mouvement soit maintenant lancé. La COPREM a fait là un remarquable travail de pionnier. Il faut le saluer et souhaiter que l'œuvre ainsi commencé se poursuive.

Le Doyen de l'Inspection
Générale de Mathématiques
Pierre LEGRAND

Le travail de relecture des épreuves et de mise au point a été assuré par M. l'Inspecteur Départemental de l'Éducation Nationale Charles MORITZ.
La réalisation matérielle a été confiée au C.R.D.P. de Strasbourg.
Qu'ils en soient remerciés au nom de la COPREM.

TABLE DES MATIÈRES

Deuxième partie : LE CALCUL NUMÉRIQUE

page

— INTRODUCTION —

Un certain nombre d'objectifs généraux a été assigné aux réflexions de la COPREM. Rappelons ceux qui figurent dans la lettre, datée du 9 mai 1983, du Ministre au Président de la COPREM :

- *prévoir l'utilisation des outils mathématiques dans d'autres disciplines,*
- *rechercher l'utilisation des méthodes diversifiées propres à susciter l'intérêt des élèves et à développer leur activité dans la construction des concepts et la résolution de problèmes,*
- *mettre au point une progression de l'enseignement structurée sans être trop strictement linéaire afin de permettre les rythmes différenciés d'apprentissage,*
- *analyser les difficultés des élèves face aux démarches mathémathiques, ainsi qu'au vocabulaire et à la syntaxe du langage employé.*

La COPREM, pour sa part, a entrepris son travail de réflexion en considérant que les mathématiques doivent être abordées dans leurs rapports avec le réel, avec une explicitation et une formulation très progressives des objets mathématiques en jeu. Cela implique que les situations choisies conduisent à une approche interdisciplinaire avec la physique, la géographie, l'économie quotidienne, etc., et que, dans l'analyse de ces situations, soient prises en considération plusieurs catégories de concepts et de modèles mathématiques : numériques, fonctionnels, vectoriels, spatiaux... dont certains sont absents de l'enseignement actuel des mathématiques. Les enseignants doivent avoir présents à l'esprit ces concepts et modèles différents, lorsqu'ils conduisent l'activité des élèves en classe, même s'ils ne peuvent que très partiellement les aborder dans leur enseignement.

Un souci de rigueur excessive peut conduire à de graves mécomptes, de même qu'une pratique pédagogique qui intoduirait systématiquement les techniques avant les problèmes auxquelles elles apportent une solution.

Plutôt que de disperser d'emblée ses efforts sur la totalité de l'enseignement des mathématiques, la COPREM a choisi d'engager une étude longitudinale de thèmes d'intérêt général, présentant des aspects interdisciplinaires incontestables. Le premier thème retenu a été la proportionnalité.

Le but est non seulement d'appliquer, et le cas échéant de confronter les principes précédents à des contenus mathématiques réels de l'enseignement, et bien évidemment d'en dégager des indications utiles pour une progression d'enseignement du thème retenu, mais aussi de se donner au sein de la COPREM une méthode de travail permettant d'entreprendre ultérieurement l'étude d'autres thèmes : géométrie, algorithmique,...

Comment ont été élaborés les deux textes présentés dans cet ouvrages ?

Le texte sur la PROPORTIONNALITÉ résulte de la réécriture d'un premier texte, diffusé auprès d'équipes de recherches, de groupes de travail et de responsables de formation. Les réactions transmises à la COPREM à la suite de cette diffusion ne peuvent malheureusement pas être reproduites ici, car leur volume représenterait près de 500 pages. Mais elles ont donné lieu à des analyses, présentées lors de réunions de la COPREM, qui ont conduit au texte actuel. Que leurs auteurs en soient ici chaleureusement remerciés : le travail de synthèse auquel ils ont contribué peut, grâce à eux notamment, se voir attribuer un caractère exemplaire. La COPREM souhaite que de telles synthèses puissent être mises à la disposition des enseignants, afin qu'ils puissent prendre en compte, dans leur pratique quotidienne, les perspectives d'ensemble et les enjeux principaux d'apprentissage concernant les thèmes majeurs des mathématiques de la scolarité pour tous.

Le texte sur le CALCUL NUMÉRIQUE n'a pas encore fait l'objet d'une diffusion. C'est cette publication qui le fera connaître, et la COPREM souhaite donc qu'il soit l'objet de critiques, remarques et propositions (le secrétariat de l'IREM de Strasbourg, 12, Rue du Général Zimmer, 67084 STRASBOURG CEDEX, transmettra à la COPREM celles qui lui seront adressées).

Composition du groupe de travail de la COPREM pour les deux textes de ce livre :

Jean Martinet (Président de la COPREM jusqu'en 1985),

François Pluvinage (Responsable du groupe "Collège"), Henri Bareil, Claudine Chevalier, Régine Douady, Françoise Ligier, Jean-Pierre Ohran, Nicole Picard, Serge Thévenet, Gérard Vergnaud, Gérard Vinrich.

Étaient représentées à la COPREM : la Direction des Écoles (Mme Vimont), celle des Collèges (M. Rouquairol), celle des Lycées (D. Reisz), et l'Inspection Générale de Mathématiques.

LA PROPORTIONNALITÉ

1. L'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITÉ : IMPORTANCE ET DIFFICULTÉS

1.1. Intérêt du thème

La proportionnalité constitue un axe essentiel de l'enseignement des mathématiques et des sciences. Elle sert de cadre à l'introduction de la multiplication et de la division dès le cours élémentaire et le cours moyen. Elle est aussi essentielle pour l'étude et la compréhension des relations entre grandeurs dans la plupart des chapitres de la physique du second cycle des lycées. Sous l'aspect des pourcentages elle joue un rôle social fondamental. D'un bout à l'autre de la scolarité, les élèves rencontrent de nombreuses difficultés, durables pour la plupart d'entres elles.

Il est de la plus grande importance, pour l'enseignement, d'analyser les différentes catégories de difficultés qu'elle présente.

1.2. Présentation du thème

Dans une situation de proportionnalité, on est en présence d'une correspondance entre deux variables V et V' qui représentent soit des valeurs d'une grandeur, soit des nombres. Lorsqu'il s'agit de grandeurs, on choisit une unité pour chaque grandeur. Toute relation entre deux grandeurs se traduit, **une fois les unités choisies**, en une relation entre les **nombres** qui mesurent les grandeurs (exemples : côté d'un carré et son périmètre, volume d'une quantité de farine et sa masse, durée du parcours d'un mobile et distance parcourue, ...). La correspondance entre nombres est, dans ce cas, tributaire de la relation entre grandeurs et du choix des unités.

On peut représenter la correspondance entre les variables de différentes manières :

— liste de couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d')

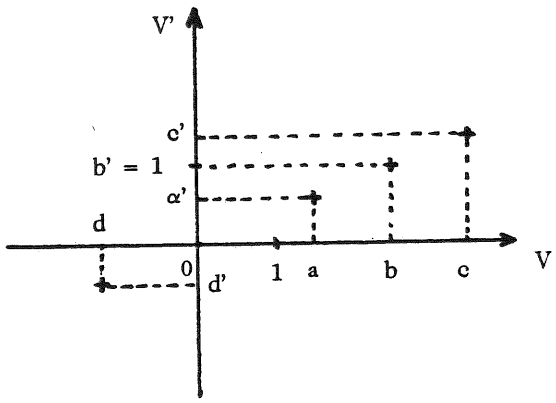
— tableau en lignes

variable V	a	b	c	d
variable V'	a'	b'	c'	d'

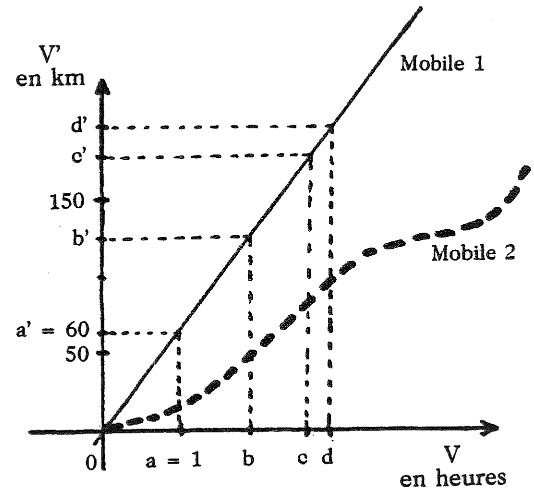
— tableau en colonnes

V	V'
a	a'
b	b'
c	c'
d	d'

— points sur un quadrillage gradué. Deux exemples sont illustrés, pour lesquels on a placé quelques valeurs, de manière à fournir des références (1 sur chacun des axes du premier graphique, 1 h et 50 km pour le second graphique). *Devinette :* Quel est le mobile 2 du second graphique ?



V et V' sont des variables numériques.



V est une durée mesurée en heures
V' est une distance mesurée en km

1.3. Point de vue numérique

— Aspect "**fonction**" : on peut déterminer un nombre α (coefficient de proportionnalité) tel que $a' = \alpha \times a$, $b' = \alpha \times b$, $c' = \alpha \times c$, $d' = \alpha \times d$, ... plus généralement $V' = \alpha \times V$ pour n'importe quelle valeur numérique attribuée à V. De la sorte, V' est une **fonction** de V. Mieux, la donnée d'un seul couple ou correspondance (s, s') permet de déterminer le coefficient de proportionnalité α, donc de connaître la fonction :

$$\alpha s = s' \quad \text{conduit à} \quad \alpha = \frac{s'}{s}.$$

V	V'
a	$a' = \alpha a$
b	$b' = \alpha b$
c	$c' = \alpha c$
d	$d' = \alpha d$

$\times\alpha$

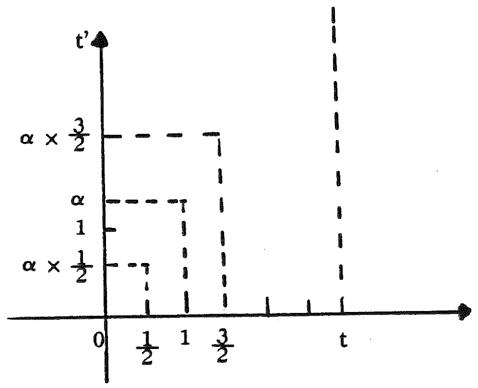
A partir d'un couple (s, s') donné, la correspondance t' d'un nombre donné t est donc déterminé par : $t' = \frac{s'}{s} \times t$.

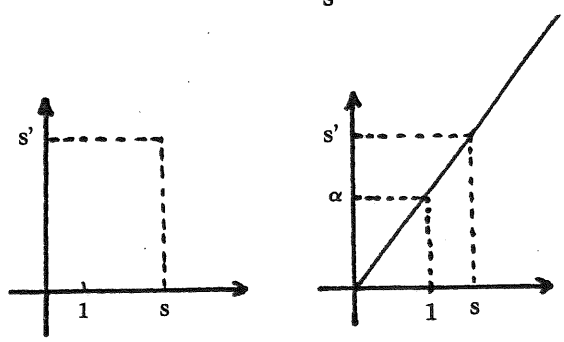
N.B. Dans le cas particulier où t = 1, t' n'est autre que $\frac{s'}{s} = \alpha$.

$1 \longmapsto \alpha$
$t \longmapsto t' = \alpha \times t$

ou

$s \longmapsto s'$
$1 \longmapsto \alpha$
$t \longmapsto \frac{s'}{s} \times t$





Graphiquement les points de coordonnées (a, a'), (b, b'), ... sont alignés. Ils définissent une **droite passant par 0 de pente α** par rapport à l'axe horizontal sur laquelle sont situés tous les points de coordonnées t, t') où $t' = \alpha \times t$.

La description $V \longmapsto V' = \alpha \times V$ correspond à ce que, dans le reste du texte, on appellera l'**aspect fonction de la proportionnalité**.

— Aspect "**isomorphisme**" : la correspondance* est telle que,

- pour a $\longleftrightarrow$ a' et b $\longleftrightarrow$ b' on a c = a + b $\longleftrightarrow$ c' = a' + b'
- pout tout nombre k et a $\longleftrightarrow$ a', on a k × a $\longleftrightarrow$ k × a'
- a ≤ b et $\alpha > 0 \Longrightarrow$ a' ≤ b'

Remarques : 1) Avec les notations ci-dessus, on a

$$a \times b \longleftrightarrow a \times b' \quad \text{et} \quad b \times a \longleftrightarrow b \times a'$$

par suite a × b = b × a $\longleftrightarrow$ a × b' = b × a'.
Autrement dit, si a $\longleftrightarrow$ a' et b $\longleftrightarrow$ b', alors a × b' = b × a'. Ceci permet, connaissant trois des nombres a, b, a', b', de déterminer le quatrième.

2) Si k est un nombre entier,

$$k \times a = \underbrace{a + \ldots + a}_{k \text{ termes}} \longleftrightarrow \underbrace{a' + \ldots + a'}_{k \text{ termes}} = k \times a'$$

Par définition, $r = \frac{1}{k} \times a$ est tel que $k \times r = a$,

et à r correspond r' tel que $k \times r' = a'$;

par suite $r' = \frac{1}{k} \times a'$ et on a : $\frac{1}{k} \times a$ $\frac{1}{k} \times a'$.

3) Si 1 $\longleftrightarrow$ $\alpha \leq 0$, alors :

$$a \leq b \Longrightarrow a' \geq b'$$

1.4. Point de vue des grandeurs

Toute la description que nous venons de faire dans le cadre numérique a sa formulation dans le cadre des grandeurs (d'où provient en général l'expression numérique de la proportionnalité). Précisons. Parler de **grandeur** mesurable suppose être en présence d'une variable dont on sait comparer, ajouter et subdiviser les valeurs. On considère ici deux grandeurs variables en correspondance.

— L'aspect "isomorphisme" s'exprime de la même façon dans le cadre des grandeurs que dans le cadre numérique. Ainsi, notons V et V' les grandeurs variables en correspondance :

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} V_1 \longleftrightarrow V'_1 \\ V_2 \longleftrightarrow V'_2 \end{array} \right. , \text{ alors} \quad V_1 + V_2 \longleftrightarrow V'_1 + V'_2 \text{ et,}$$

pour tout nombre k : $kV_1 \longleftrightarrow kV'_1$.

— L'aspect "fonction" fait apparaître une difficulté qui tient au rôle qu'y joue le choix des unités de mesures. Notons par exemple u et u' deux unités de mesure, conduisant à écrire V = au et V' = a'u', avec une correspondance qui s'exprime par la relation a' = αa. Le nombre α est dans ce cas la mesure d'une nouvelle grandeur, que l'on peut appeler "grandeur quotient" (exemple : la vitesse). La grandeur quotient est mesurée avec une unité quotient, qui dépend du choix de u et u' (exemple : une vitesse peut être mesurée en km/h, en m/s, ...).

— Dès que l'on change d'unité, pour l'une des grandeurs variables au moins, il devient difficile de disjoindre l'aspect isomorphisme et l'aspect fonction, qui se trouvent liés. Cette liaison apparaît dès qu'est mise en œuvre une "réduction à l'unité". Considérons par exemple la détermination du prix au kilo de confiture de baie d'églantier, vendue 7,65 F le pot de 450 g.
Au § 3.1. on trouvera d'autres exemples analogues.
Pour l'affichage des données de ce problème, différents choix peuvent être faits.

Masse en g	Prix en F
450	7,65
1	
1000	

Masse	Prix
450 g	7,65 F
1 g	
1000 g	

Masse en kg	Prix en F
0,45	7,65
1	

* *Ici, la correspondance ne conduit pas à privilégier un sens (comme V $\longrightarrow$ V' dans l'aspect fonction). C'est pourquoi elle est désignée par des doubles flèches ($\longleftrightarrow$) dans ce paragraphe.*

Le diagramme correspondant aux nombres des deux premières lignes, dans les deux tableaux où les masses sont exprimées en g, est le suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] 450 \arrow[r, mapsto, "\times \frac{7{,}65}{450}"] \arrow[d, ": 450"'] & 7{,}65 \arrow[d] \\ 1 \arrow[r, mapsto] & \frac{7{,}65}{450} \end{tikzcd}$$

Le nombre $\frac{7{,}65}{450}$ y apparaît deux fois. Dans un cas, il désigne une "grandeur quotient" : le prix en F **par** gramme ; dans l'autre, il désigne une grandeur de référence (le franc) : le prix en F **de** 1 gramme. On remarquera au passage que cette somme est fictive, car elle s'élève à 0,017 F (mais de telles valeurs, données avec une précision supérieure au centime, apparaissent par exemple dans le cours des monnaies communiqué par les média). La question de savoir si l'on a divisé par 450 parce que l'on forme une "grandeur quotient" (aspect fonction) ou parce que l'on se ramène de 450 à 1 (aspect isomorphisme) n'a pas de réponse canonique, c'est une question d'interprétation personnelle.
La manipulation des nombres du dernier tableau, pour aboutir au résultat de 17 F, oblige probablement **à au moins connaître l'aspect fonction**. En effet diviser par un nombre compris entre 0 et 1 est conceptuellement complexe : la seule vision "fois" de la multiplication (aboutissant à la structure désignée par les mathématiciens comme "structure de module sur les entiers") ne s'avère pas suffisante, il faut nécessairement **inverser la multiplication** qui fait passer de 1 à 0,45, alors même que cette multiplication fait intervenir l'idée de quotient.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] 0{,}45 \arrow[r, mapsto, "\times 17"] \arrow[d, shift left, ": 0{,}45"] & 7{,}65 \arrow[d] \\ 1 \arrow[r, mapsto] \arrow[u, shift left, "\times 0{,}45"] & 17 \end{tikzcd}$$

Question à se poser à propos du diagramme ci-contre :
Lequel des deux nombres 17 qui apparaissent semble-t-il fournir la réponse ?

— Détaillons, sous forme de diagramme présentant des unités de référence, un exemple de masse volumique d'un matériau homogène. On donne une masse de 57 g pour 10 cm³ de ce matériau.

Volumes **Masses**

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] 10 \text{ cm}^3 \arrow[r, mapsto, "\times \frac{57}{10} \text{ g/cm}^3"] \arrow[d, "\times 100"'] & 57 \text{ g} \arrow[d] \\ 1 \text{ dm}^3 \arrow[r, mapsto, "\times 5700 \text{ g/dm}^3"] \arrow[d, equal] & 5700 \text{ g} \arrow[d, equal] \\ 1 \text{ dm}^3 \arrow[r, mapsto, "\times 5{,}7 \text{ kg/dm}^3"] & 5{,}7 \text{ kg} \end{tikzcd}$$

Traitements numériques

$$\left\{\begin{array}{l} 10 \longmapsto 57 \\ a \longmapsto \frac{57}{10}\,a \qquad \alpha_1 = 5{,}7 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{10}{1000} \longmapsto 57 \\ 1 \qquad\quad 5700 = \alpha_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{10}{1000} \longmapsto \frac{57}{1000} \\ 1 \longmapsto 5{,}7 = \alpha_3 \end{array}\right.$$

Ainsi la masse volumique de ce matériau est u = 5,7 g/cm³, mais aussi u = 5700 g/dm³, ou encore u = 5,7 kg/dm³. Il est apparu différentes unités : g/cm³, g/dm³ et kg/dm³, pour la masse volumique, et l'on a :

$$1 \text{ g/cm}^3 = 1 \text{ kg/dm}^3 = 1000 \text{ g/dm}^3.$$

De façon analogue, km/h et m/s sont des unités usuelles pour la vitesse, et l'on a :

$$1 \text{ m/s} = 3{,}6 \text{ km/h}$$

ou : $1 \text{ km/h} = \frac{1}{3{,}6} \text{ m/s}$ ($\frac{10}{36}$ = 2,777... n'est pas une fraction décimale).

— Dans certains problèmes, comme ceux d'échelle et de pourcentage, les variables v et v' en correspondance réfèrent à une même grandeur (longueur, prix, ...). Si v et v' ne sont pas mesurées avec la même unité, les problèmes sont les mêmes que précédemment. Si v et v' sont mesurées avec la même unité, le coefficient de proportionnalité ne dépend pas du choix de cette unité : c'est un "nombre sans dimension".

Exemple 1 : Représentation à l'échelle, avec 2 km $\longmapsto$ 1 cm.
- On peut dire que l'échelle est 0,5 cm/km.
- On peut aussi dire que l'échelle est $\frac{1}{200\ 000}$.

Exemple 2 : Pourcentage. On indique qu'une taxe est de 18,6 %.
- Si la monnaie de référence est le franc, on peut dire que la taxe est 18,6 c/F.
- A une somme de référence s correspond la taxe αs, avec $\alpha = \frac{18,6}{100} = 0,186$. Ce coefficient de proportionnalité est la même quelle que soit la monnaie de référence.

1.5. Interactions entre cadre des grandeurs, cadre numérique et cadre de la représentation

Nous avons vu que, dans les relations entre mesures des grandeurs, la connaissance des unités de mesure est de première importance pour leur signification. Mais une fois les unités explicitées et fixées, un problème portant sur des grandeurs reçoit une formulation numérique. Ainsi traduit, le problème peut recevoir un traitement numérique en plusieurs étapes jusqu'à être résolu. La solution peut toujours être traduite en termes de grandeurs, mais, selon les cas, les étapes intermédiaires peuvent ou non avoir une signification dans les deux cadres : grandeurs et nombres.
Le modèle numérique qui prend en charge les diverses opérations sur les grandeurs, poussées arbitrairement loin indépendamment des limitations matérielles, est celui des nombres réels. A supposer que l'on dispose d'une solide maîtrise des nombres réels, il suffirait d'écrire une relation telle que

$$f(x) = ax$$

pour être à même, en l'exploitant, de résoudre toute question de proportionnalité. Mais tel n'est pas le cas : le champ numérique disponible pour l'élève est **en évolution** jusqu'au delà de la classe de troisième ; à la fin de cette classe, il ne recouvre qu'une partie des nombres réels. En fait, une construction (même partielle) des nombres réels, leur conférant un statut d'outil pour la résolution de multiples questions, suppose que l'on ne soit pas contenté d'un édifice purement abstrait et détaché de toute préoccupation de traitement des grandeurs. Et, d'un autre côté, une mise en place complète des traitements sur les grandeurs est inconcevable sans l'outillage numérique approprié. C'est donc une démarche d'acquisitions simultanées qu'il convient d'envisager, démarche d'ailleurs conforme à l'évolution des connaissances envisagée du point de vue épistémologique.
Des situations-problèmes fonctionnant alors de façon enrichissante pour un élève sont celles qui présentent pour lui les caractéristiques suivantes :
- ses connaissances et ses possibilités de représentation de la situation lui permettent d'établir une correspondance, nécessairement imparfaite, entre grandeurs et nombres ;
- la correspondance conduit à des conjectures, sur les grandeurs en jeu ou sur les nombres, que la traduction d'un cadre à l'autre amène à justifier ;
- la situation permet de poser dans un cadre (en général le cadre numérique) les conventions compatibles avec le fonctionnement dans l'autre (en général le cadre géométrique ou physique).

L'interaction (et non la simple juxtaposition) est alors source de nouvelles connaissances.

Le premier des exemples présentés dans le § 5, qui termine cette étude de la proportionnalité, détaille une situation-problème fonctionnant ainsi pour des élèves de l'école primaire (âge : vers 10 ans). Du point de vue de ces élèves, l'ensemble des valeurs des variables en jeu dans cette situation n'est pas donné a priori ; au contraire, il est susceptible d'évoluer, de s'étendre au cours de la scolarité. On notera également que les relations exploitées ne relèvent pas toutes de la proportionnalité, précisément pour situer celle-ci et mettre en relief ses propriétés par comparaison avec d'autres relations.

1.6. Proportionnalité proprement dite

Examinons le problème suivant portant sur deux grandeurs qui varient proportionnellement.
première grandeur : a b ? d ...
deuxième grandeur : a' ? c' d' ...
Plusieurs procédures sont possibles pour déterminer c et b' connaissant a, b, a', c'. Elles sont assez différentes selon qu'on recourt à l'aspect fonction ou à l'aspect isomorphisme et selon le cadre dans lequel chaque étape de la procédure prend sa signification.

— **L'aspect fonction** mène à chercher α tel que $a' = \alpha \times a$ puis à calculer $b' = \alpha \times b$ et $c = \frac{1}{\alpha} \times c'$.
Remarquons que, si α a pour mesure un entier, dire par exemple que a' est 3 fois plus grand que a n'a de sens que dans le cadre numérique, à condition que a et a' désignent des mesures pour des unités choisies. Si a' désigne une distance (par exemple 21 km) et a désigne une durée (par exemple 7 heures), cela ne signifie pas que la distance a' est égale à trois fois la durée a, mais seulement que la mesure de a' en

km (ici 21) est égale à trois fois la mesure de a en heures (ici $21 = 3 \times 7$). La multiplication dans le cadre des grandeurs n'est pas une addition répétée, alors que sa traduction dans le cadre numérique l'est. Du point de vue de l'élève, si la situation-problème s'y prête, la grandeur quotient α peut être familière. C'est le cas des km/h ou des F/kg. Mais dans ces mêmes cas, la grandeur $1/\alpha$ l'est beaucoup moins alors que d'une part, dans le cadre numérique, les coefficients α et $1/\alpha$ jouent des rôles analogues et d'autre part, dans le cadre des grandeurs, $1/\alpha$ peut jouer un rôle important. C'est le cas si on cherche la vitesse moyenne V d'un mobile sur deux parcours de même longueur, l'un étant parcouru à la vitesse V_1 et l'autre à la vitesse V_2 (exemple d'un train sur un trajet aller-retour) ; dans ce cas en effet, la relation entre V, V_1 et V_2 est (cf. 5.2.) :

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)$$

qui définit V comme moyenne harmonique de V_1 et V_2.
Les coureurs cyclistes savent bien, d'expérience, que s'ils veulent gagner du temps dans une étape comportant la montée d'un col raide et sa descente, ils ont intérêt à gratter du temps à la montée : gagner 1 km/h à la montée a bien plus d'importance que 5 km/h à la descente.
Ainsi l'aspect fonction introduit une dissymétrie entre les rôles des deux grandeurs. Ce n'est pas le cas si on considère la formulation numérique du problème, pour le résoudre numériquement sans chercher de signification intermédiaire et se contenter de traduire la solution obtenue.

— **L'aspect isomorphisme** mène à chercher k tel que $b = ka$ et à calculer $b' = ka'$; de même, il mène à chercher r tel que $c' = ra'$ et à calculer $c = ra$.
La comparaison entre eux de a, b, c, d ... (ou de a', b', c', d' ...) met en jeu des nombres sans dimension (ou scalaires). Si $k = 3$, formuler que b est trois fois plus grand que a résume une situation additive : $b = a + a + a$, et prend du sens dans le cadre des grandeurs.

— En jouant avec les 2 cadres (grandeurs et nombres) et en explicitant ce qu'on fait, on peut aussi trouver de l'intérêt à la technique du "produit en croix" pour déterminer c et b' connaissant a b a' c' :

entre grandeurs $a \longmapsto a'$ $\quad a \longmapsto a'$
$b \longmapsto ?$ $\quad ? \longmapsto c'$

entre nombres correspondants : $a \times b' = b \times a'$ et $b' = \frac{b}{a} \times a' = b \times \frac{a'}{a} = \frac{b \times a'}{a}$

de même $a \times c' = c \times a'$ $\quad c = \frac{a}{a'} \times c' = a \times \frac{c'}{a'} = \frac{a \times c'}{c}$

L'un des objectifs fondamentaux de l'enseignant est d'amener les élèves confrontés à de tels problèmes à recourir à l'une ou l'autre de ces procédures ou à une combinaison d'entre elles suivant les nécessités ou l'économie de la situation.

2. ANALYSE DU POINT DE VUE DIDACTIQUE

2.1. L'apparition des situations de proportionnalité

Les situations de proportionnalité apparaissent très tôt dans la scolarité des élèves ; en fait elles apparaissent dans un grand nombre des problèmes menant à une multiplication. L'aspect élémentaire de la multiplication comme somme itérée fait déjà apparaître une propriété de l'isomorphisme.

1) Une mère de famille veut offrir 5 bonbons à chacun de ses 3 enfants. Combien de bonbons achètera-t-elle ?
2) J'achète 3 kg de pommes de terre à 5 F le kg ; combien vais-je payer ?

Dans les deux cas l'écriture $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ est parfaitement adaptée ; mais dans le premier cas il s'agit de variables discrètes : si l'on fait varier les données de l'énoncé, en mettant 4 ou 6 bonbons au lieu de 5, et 4 ou 5 enfants au lieu de 3, on peut employer une écriture analogue. Dans le second cas, au contraire, il s'agit de grandeurs "divisibles" : si on fait varier les données en indiquant par exemple 3,275 kg et 5,80 F le kg (oublions les problèmes d'arrondis car dans ce cas, le prix à payer sera sans doute 19 F), on ne peut plus réduire la multiplication à une suite d'additions, sauf à faire intervenir d'autres unités ramenant le problème à une multiplication où au moins l'un des deux nombres est un entier.

2.2. Le traitement de la proportionnalité

La dualité d'aspects de la proportionnalité (fonction et isomorphisme) a suscité de nombreuses recherches sur l'enseignement élémentaire et de premier cycle. Les résultats déjà obtenus montrent en particulier que les procédures du type isomorphisme sont plus disponibles et utilisés plus volontiers par les élèves que les procédures de type "fonction". Toutefois cela est à nuancer selon la familiarité des élèves avec les valeurs numériques en jeu dans les problèmes posés : un changement des valeurs numériques peut entraîner une modification des procédures ; dans ce cas, les variables numériques constituent des variables didactiques à la disposition de l'enseignant pour favoriser ou au contraire bloquer une procédure. Un exemple (issu d'une expérience en CM) se trouve cité dans le § 5.

2.3. Manipulation simultanée de plusieurs proportionnalités

Deux types de situations sont d'une importance fondamentale, et présentent des difficultés fort distinctes :

1) L'enchaînement de deux proportionnalités :

1ère grandeur $\longleftrightarrow$ 2ème grandeur $\longleftrightarrow$ 3ème grandeur

qui ressort de la notion de composition des fonctions.

2) La "proportionnalité multiple" :

$$\left.\begin{array}{c}\text{1ère grandeur}\\ \times\\ \text{2ème grandeur}\end{array}\right\}\longrightarrow \text{3ème grandeur}$$

Pensons à l'aire du rectangle, au volume du prisme, et à tous les problèmes simples où une grandeur est fonction de 2 (ou plusieurs) autres : consommation, production, ... En fixant l'une des variables, on obtient un problème de proportionnalité simple, mais cela ne suffit pas à décrire complètement la situation. Notons aussi qu'en fixant le résultat, on obtient une situation de "proportionnalité inverse", c'est-à-dire que l'une des variables est proportionnelle à l'inverse de l'autre variable. L'étude de telles situations est importante, vu le nombre de cas dans lesquels on les rencontre ; en fait les cas de proportionnalité étudiés classiquement, en physique notamment, sont souvent des cas de proportionnalité multiple dans lesquels on ne fait varier qu'une variable à la fois.

2.4. Les extensions du concept de proportionnalité

Un grand nombre de difficultés concernent l'extension des opérations de pensée nées dans des contextes familiers (comme les situations de partage ou de dépense) à des contextes moins familiers et conceptuellement difficiles comme :
— le volume, la masse volumique, l'agrandissement dans le premier cycle
— la mécanique, la thermique ou l'électrocinétique dans le second cycle.
De même des difficultés considérables sont dues à l'extension du domaine numérique : grands nombres, nombres plus petits que un, nombres fractionnaires ou décimaux. Cette extension suppose bien entendu la maîtrise conceptuelle du domaine concerné ; elle suppose aussi une synthèse non évidente des concepts de "fraction partie-tout", de rapport, de grandeur fractionnaire et d'opérateur fractionnaire, pour aboutir au concept de nombre rationnel.
Or sur de tels points l'apprentissage est d'une grande lenteur : certains raisonnements par moitié ou par quart peuvent être abordés dès le CE1, et sont opératoires pour la majorité des élèves dès le CE2. Cependant la comparaison, la multiplication, l'addition des fractions dans toute leur généralité sont encore mal maîtrisées par la majorité des élèves en fin de premier cycle.

2.5. Conclusions

Il faut avoir conscience que sur le thème de la proportionnalité, on peut organiser des activités et des situations d'apprentissage depuis le cours élémentaire jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire. A chaque niveau, on constate de grandes différences individuelles dans les compétences des élèves, et le même élève peut échouer à utiliser un traitement dans une situation alors qu'il sait l'utiliser dans d'autres situations.

On peut avancer des explications de type didactique : la fréquence d'emploi d'un traitement dans un type de situations peut avoir rendu l'élève familier avec ce traitement dans de telles occasions d'emploi, sans qu'il maîtrise nécessairement les critères de reconnaissance de situations de proportionnalité, au point même de l'inciter à pratiquer des procédures incorrectes de proportionnalité (par exemple dès qu'il peut exhiber un tableau de nombres). Une autre explication vient de ce qu'un concept (ici la proportionnalité) prend son sens, entre autres, dans les relations qu'il entretient avec d'autres concepts impliqués dans la situation (comme ceux de masse et de volume dans la recherche d'une masse volumique). Le manque de maîtrise de certains d'entre eux rend difficile une modélisation correcte d'un problème les impliquant. La modélisation est en revanche possible si les concepts sont à peu près disponibles. D'où une différence de traitement selon le contexte du problème. Ainsi se pose le problème essentiel de la reconnaissance des situations de proportionnalité (proportion simple ou multiple) selon le domaine concerné. C'est un problème de conceptualisation du domaine en question dans sa complexité, et non pas seulement séparément de ses constituants.
Cette variabilité des compétences dans le champ conceptuel de la proportionnalité et la longue durée du processus d'acquisition et de maîtrise de ce champ, conduisent à distinguer plusieurs types d'objectifs, et notamment à ne pas confondre les objectifs concernant les activités et les compétences dont il faut favoriser le développement à tel ou tel niveau, et les objectifs concernant les acquisitions évaluables à ce même niveau ; un enseignant doit pouvoir confronter les élèves à des activités difficiles, de manière à exercer leur esprit de recherche et à le conduire à découvrir des propriétés nouvelles intéressantes, sans pour autant qu'il puisse évaluer les élèves sur cette base. Enfin, il est souhaitable de ne pas enfermer le concept d'objectif dans la logique étroite des objectifs minima, car ceux-ci sont fixés :

- soit trop bas et ils contribuent alors à diminuer le niveau de l'enseignement, et peut-être aussi la capacité des élèves à apprendre (mais il s'agit là d'une hypothèse).
- soit trop haut et ils risquent d'être interprétés par les enseignants du niveau suivant comme des compétences acquises par les élèves, alors qu'il n'en est rien.

Il faut donc envisager un ensemble d'objectifs différenciés et hiérarchisés couvrant plusieurs niveaux d'enseignement à la fois. Les propositions ci-après ne constituent qu'une source de réflexion qui s'appuie partiellement sur des résultats établis, partiellement sur des opinions.

3. QUELQUES ACTIVITÉS FONDAMENTALES POUR L'ENSEIGNEMENT

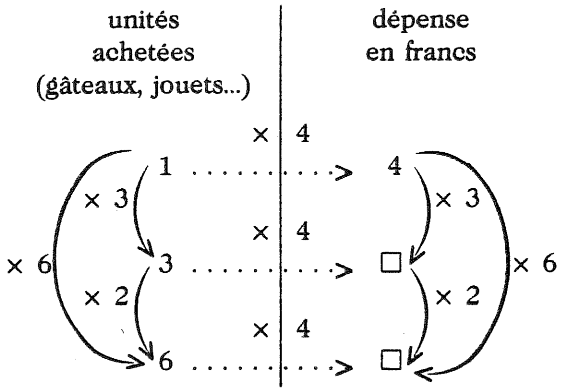
Nous en distinguons trois types particulièrement concernés dans le thème envisagé, et interagissant étroitement dans les situations d'apprentissage.

1) Organisation et traitement de données numériques
2) Manipulation et étude de grandeurs
3) Utilisation des calculatrices électroniques

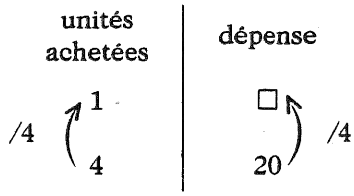
Ces actitités sont pratiquement absentes des programmes actuels ; c'est la conséquence d'une conception encore trop répandue des mathématiques comme science isolée coupée de ses relations avec les problématiques qui l'ont fondée (et continuent à l'alimenter).

3.1. Organisation et traitement des données numériques

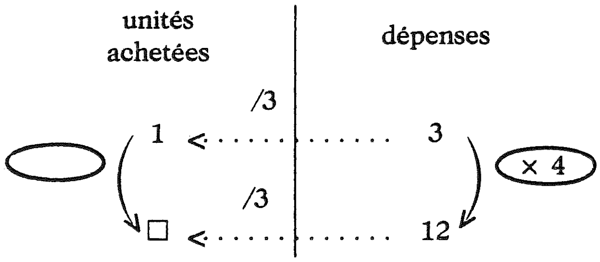
Comme nous l'avons déjà dit, les situations de proportionnalité font le plus souvent intervenir des grandeurs de natures différentes ou des objets différents. Un problème étant posé, les données doivent être organisées avec précision en tenant compte des questions posées : la présentation des données résulte d'une certaine analyse du problème et fait déjà partie de l'activité mathématique. Les indications portées peuvent être justes ou fausses. La présentation choisie n'est pas nécessairement pertinente par rapport aux données en jeu et aux questions posées ; de ce fait elle est susceptible d'évolution ou de rejet au profit d'une autre mieux adaptée.
Il est commode d'utiliser des tableaux mettant bien en évidence en les organisant les informations numériques en jeu et les opérations possibles entre elles. Cela permet de pointer les variables et éventuellement les relations entre elles. Un report graphique sur quadrillage gradué peut être intéressant dans la mesure où il peut recevoir et intégrer de nouvelles informations sans avoir à réorganiser les anciennes, ce qui n'est pas possible en général avec un tableau.
Dans les exemples qui suivent, nous avons fait le choix de ne pas indiquer les unités à côté des nombres, mais on peut faire le choix contraire.



exemples de multiplications



recherche d'un prix unitaire



Combien peut-on acheter de gâteaux ?

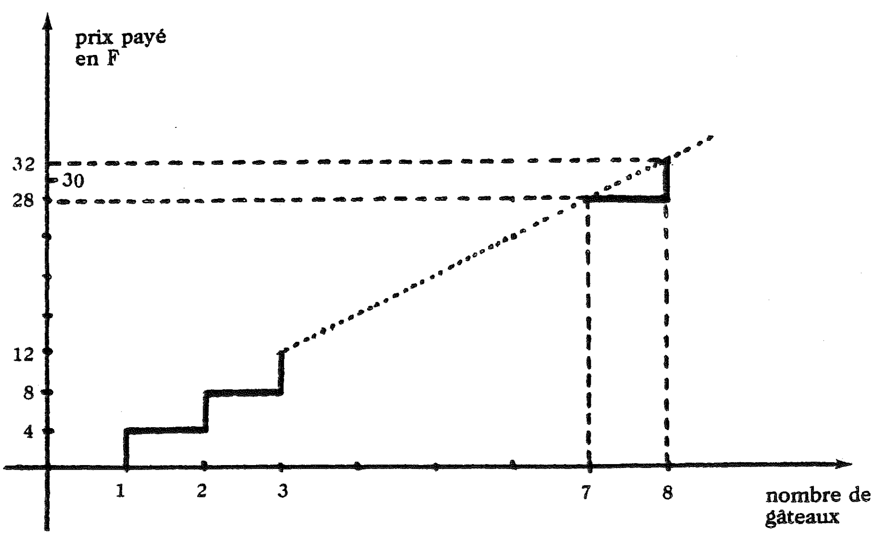
recherche du rapport
combien de fois 3 francs
est contenu dans 12 francs

On peut toutefois remarquer que lorsque chaque variable ne comporte que deux valeurs, le tableau comporte quatre termes et ne permet pas de bien distinguer le rapport scalaire et le coefficient de proportionnalité. En utilisant plus de deux valeurs, c'est-à-dire plusieurs lignes du tableau, on met mieux en évidence que les rapports scalaires sont variables et dépendent des couples de lignes choisis, tandis que le coefficient de proportionnalité est le même sur toutes les lignes.
Bien entendu, on peut utiliser des lignes tout aussi bien que des colonnes pour distinguer les deux types de variables

unités	1	3	□
dépenses	□	24	40

Toutefois, pour résoudre des problèmes du type ci-dessus (par exemple, combien de gâteaux peut-on acheter avec 30 F ?) d'autres procédures et d'autres représentations sont possibles : écrire la liste des couples (nombre de gâteaux, prix payé) jusqu'à atteindre 30 F ou l'encadrer par deux prix payés. Une autre procédure consiste à reporter graphiquement sur un quadrillage gradué des couples d'éléments en correspondance :

1 gâteau ——> 4 F
2 gâteaux ——> 8 F
3 gâteaux ——> (4 + 8) 12 F



Le fait que chaque gâteau coûte 4 F (toujours le même prix) se traduit sur le graphique par le marquage de points alignés (chaque fois qu'on achète un gâteau de plus, on paye 4 F de plus).
En prolongeant l'alignement, on y repère le couple (7, 28) et le couple (8, 32) indiquant une correspondance qu'on peut contrôler par le calcul. D'où la réponse : avec 30 F, on achète 7 gâteaux et il reste 2 F.

$$30 = (7 \times 4) + 2 = (8 \times 4) - 2.$$

Mais le graphique reste limité à la feuille de papier.

3.2. Cas de la double proportionnalité

Il est alors possible d'introduire le tableau de double proportionnalité, par exemple pour la consommation de pommes de terre d'une colonie de vacances en fonction du temps et du nombre de personnes à nourrir :

		1	20	40	100	Nbre de personnes
	1	0,1	2	4	10	
Nbre de	5	0,5	10	20	50	
jours	10	1	20	40	100	
	20	2	40	80	200	

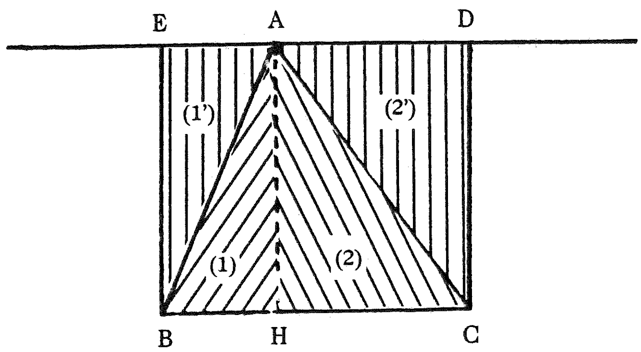
Nbre de kilos de pommes de terre

ou bien pour le calcul du nombre de couples dans un produit cartésien ou encore pour le calcul de l'aire d'un rectangle, ou d'un **triangle** :

Hauteur du triangle

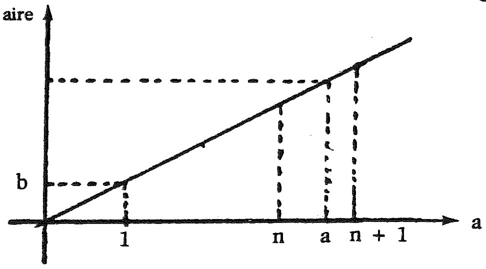
		1	3	5	8	15
	1	0,5	1,5	2,5	4	7,5
	2,5		3,75			
	3		4,5		12	
Base	3		7,5	12,5		37,5

Ce type de tableaux met bien en évidence les résultats numériques. Selon les nombres en jeu et les compétences numériques des élèves, il sera peut-être possible de repérer les propriétés de la double proportionnalité, par exemple dans le cas du triangle :
— que l'aire du triangle est proportionnelle à la base quand la hauteur est constante : coefficient constant entre la marge de gauche et une colonne donnée ;
— que l'aire du triangle est proportionnelle à la hauteur quand la base est constante : coefficient constant entre la ligne du haut et une ligne donnée ;
— que l'aire du triangle de hauteur 1 et de base 1 est égale à 1/2 ; (pour le rectangle ce serait 1)
— que la hauteur et la base varient indépendamment.
Mais il est possible que ces propriétés aient servi de règle pour constituer le tableau. Même si le tableau "montre" ces propriétés, il ne les explique pas. Or ces propriétés sont essentielles pour la compréhension des concepts visés. On a alors intérêt à recourir à une autre représentation mettant en évidence une méthode de calcul de l'aire du triangle. Par exemple :



Le triangle ABC est inscrit dans le rectangle BCDE.
Aire (ABC) = $\frac{1}{2}$ Aire (BCDE).

Quand la position de A varie sur la droite DE (entre E et D ou à l'extérieur*) l'aire du triangle ne change pas, c'est toujours $\frac{1}{2}$ Aire (BCDE). Et les dimensions du rectangle sont les longueurs de BC et AH. Alors la variation de l'aire du triangle en fonction de la base et de la hauteur correspondante est la même que la variation du rectangle en fonction de ses dimensions.
Dans le cas du rectangle dont l'une des dimensions est entière et fixée, il est facile de voir, en recourant au pavage et à sa traduction numérique qu'est l'addition itérée que l'aire est proportionnelle à l'autre dimension. On peut aussi fixer une valeur non entière à une des dimensions et n'attribuer à l'autre que des valeurs entières. Dans le cas où les deux dimensions peuvent prendre des valeurs non entières, il faut savoir comment la multiplication a été étendue aux valeurs non entières. Si on a décidé, par convention, que le produit des nombres a × b représentait l'aire du rectangle de dimention (notées encore) a, b alors par convention l'aire d'un rectangle est proportionnelle à chaque dimension quand l'autre est fixée. Mais ce n'est pas nécessairement le cas. On peut avoir prolongé la multiplication aux rationnels par algorithme purement numérique $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{p \times p'}{q \times q'}$
La représentation graphique de $a \longmapsto a \times b$ pour a entier et b fixé quelconque ou pour a quelconque et b fixé entier fournit des points alignés. Si b est fractionnaire et a aussi, on peut encadrer a par des entiers $n < a < n + 1$ et la mesure de l'aire du rectangle (a, b) par $n \times b$ et $(n + 1) \times b$. En supposant que les points du segment $(n, n \times b)$ et $(n + 1), (n + 1) \times b)$ représentent des rectangles de la famille, on a par lecture graphique une bonne approximation de l'aire. Ainsi, le graphique est producteur d'informations par interpolation linéaire : ce que les élèves mettent souvent en œuvre implicitement.



3.3. Remarques sur l'utilisation des tableaux

Les propriétés de caractère multiplicatif (multiplication et division) ne sont pas les seules intéressantes. Par exemple, un train roule à vitesse constante. Il parcourt 40 km en 16 minutes. Quelle distance parcourt-il en 36 minutes ?
A partir du tableau :

durée	distance
16	40
36	□

On peut observer, chez des élèves de 6ème et de 5ème le calcul suivant :

	durée	distance	
	16	40	
× 2	32	80	× 2
× 1/4	4	10	× 1/4
+	36	90	+

Cette procédure est une mise en œuvre implicite de la relation : f

$$f(\lambda x + \lambda' x) = \lambda f(x) + \lambda' f(x)$$

Il est du plus grand intérêt de faire expliciter par les élèves les relations implicites qu'ils utilisent dans leurs calculs, soit à l'aide d'un tableau comme ci-dessus, soit à l'aide d'expressions du genre.

$$36 = 2 \times 16 + \frac{1}{4} \times 16$$

donc ce qu'on cherche

$$\square = 2 \times 40 + \frac{1}{4} \times 40$$

* *Lorsque A est à l'extérieur du segment DE, une différence apparaît en intermédiaire ; par exemple : Aire (ABC) = Aire (AHB) – Aire (AHC).*

Les écritures algébriques faisant appel à la notation fonctionnelle ne peuvent pas être utilisées par les élèves au début du premier cycle, mais il existe des moyens pour représenter les "théorèmes" utilisés et utilisables. Les tableaux de correspondance simple et de correspondance double ainsi que les représentations graphiques constituent des moyens ; les égalités et les équations sont un autre moyen, pourvu que la mise en équation permette bien d'identifier les relations appréhendées. Ce n'est pas toujours aisé, car la multiplication et la division ne permettent pas de distinguer, comme le font les tableaux, les relations entre grandeurs de même nature et les relations entre grandeurs de nature différente.
Seules les équations aux dimensions permettent de retrouver une logique cohérente dans la représentation des problèmes de proportionnalité, car ceux-ci font intervenir inéluctablement des quotients et des produits.
Comme on ne peut introduire l'analyse dimensionnelle à l'école élémentaire et au début du premier cycle, il faut rechercher des moyens équivalents, mais plus simples, pour aider les jeunes élèves à se représenter les relations qu'ils traitent.
La mise en équation d'un problème est certainement plus difficile que sa mise en tableau. Mais le tableau peut constituer un moyen intermédiaire efficace. La représentation graphique de la proportionnalité simple a de l'intérêt pour déterminer, au moins approximativement par lecture graphique de nouveaux couples (x, y) en situant le point de coordonnées (x, y) sur le segment joignant deux points dont les coordonnées (a, a') et (b, b') sont fournies par le tableau $a < x < b$. On peut ensuite en appliquant à x la règle qui permet d'obtenir a' à partir de a (ou à y celle qui permet d'obtenir a à partir de a') contrôler la validité de y (ou de x). En ce sens, la représentation graphique peut être productrice de calculs à effectuer. Son intérêt réside aussi dans la mise en évidence des phénomènes de croissance/décroissance, continuité/discontinuité, d'extremum, de dérivée et de taux de croissance et par là même de globalisation de l'information.
Les tableaux par contre ne disent rien de ces phénomènes mais permettent de bien mettre en évidence les calculs à faire. Ils permettent aussi de faire comprendre certains aspects dimensionnels (tout comme la représentation graphique) sous des formes adaptées aux jeunes élèves et là encore de servir d'intermédiaires utiles pour l'introduction des équations aux dimensions, au niveau des lycées, et avec certaines précautions (pour des cas particuliers comme l'aire, le volume, la vitesse ou la masse volumique) au niveau des collèges.

3.4.Manipulation de grandeurs

Comme il a été indiqué plus haut, les situations de proportionnalité concernent en premier lieu des grandeurs et non des nombres. La considération de suites proportionnelles numériques est insuffisante ; il faut aussi travailler sur des grandeurs, c'est-à-dire sur des situations de proportionnalité.
Nous avons expliqué en 1.5. tout l'intérêt qu'il y avait à développer les interactions entre les trois cadres (grandeurs, nombres, représentations).
Le travail sur les grandeurs demande qu'on ait identifié ces grandeurs. Or ceci peut se faire très tôt pour certaines grandeurs : masses, longueurs, durées, plus tard aires, volumes... qui sont des grandeurs "continues". C'est tout leur intérêt.
Dans une telle perpective, le problème du **choix d'unité** peut apparaître très tôt et permettre de répondre à des questions d'égalité ou d'inégalité.
Deux manipulations paraissent privilégiées : le doublement et le partage en deux. Certaines activités correspondant à ces opérations sont proposées dans les programmes actuels, comme le pliage au CP. Mais elles ne sont pas systématiquement envisagées, ni reliées à une "mathématisation".
Voici une liste, susceptible de recouvrir les grandeurs usuelles :

Longueurs :	Pliage, report à la règle (ou au compas plus tard)
Aires :	Découpages (rectangles) et recollements convenables
Volumes :	— Voir longueurs / masses grâce à des hauteurs / masses de liquide
	— Récipients à ordonner, combiner, mesurer
Masses :	Balance à deux plateaux
Durées :	Métronomes dont l'un bat deux fois plus vite que l'autre.

Plus tard, au niveau du Collège, c'est sur ces mêmes grandeurs, et sur quelques autres qu'il faut continuer à travailler. D'où la nécessité d'assurer le suivi (tout au long du collège) des notions d'aire, de volume, masse, durée, d'angle...

3.5. Utilisation des calculatrices

Le manque de fiabilité de beaucoup d'élèves dans l'exécution des opérations, le "détournement d'attention" que provoque cette exécution dans la résolution d'un problème, sont des obstacles rencontrés régulièrement dans l'étude de la proportionnalité. Cet obstacle peut être en partie levé par l'utilisation des

calculettes, et ceci dès l'école élémentaire. Actuellement l'acquisition des mécanismes opératoires est considérée comme nécessaire à la poursuite de l'apprentissage, et le prix qui y est attaché est trop important. Au contraire, l'usage de la calculette permet d'aborder des questions importantes comme la proportionnalité, indépendamment de l'exécution sur papier de la multiplication et de la division.
Dans la vie moderne, le calcul à la main joue un rôle relativement réduit. Ce qui importe, c'est de savoir reconnaître la nature des opérations appropriées, puis de savoir estimer le résultat (le plus souvent mentalement), le résultat précis pouvant être obtenu à la machine.
L'apprentissage des opérations doit être réexaminé en tenant compte de cette situation, et du rôle qu'il joue dans l'acquisition des principes de la numération.
Toutefois, l'estimation correcte et rapide d'un résultat demande une bonne maîtrise de la numération, des propriétés des opérations et de l'ordre. Ainsi le travail de calcul mental avec explicitation des procédures est de première importance.
Les exercices de calcul restent donc nécessaires, sous des formes variées : calcul sur papier, calcul mental, calcul-machine (du boulier à l'utilisation rationnelle des calculatrices). Par contre, dans les exercices d'application, l'emploi des calculettes doit être permis, pour ne pas détourner ces exercices de leur but véritable : le traitement d'un certain nombre de données, et la reconnaissance des opérations à mettre en œuvre.

4. LES ÉTAPES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITÉ

4.1. Introduction : exemples exploitables à plusieurs niveaux scolaires

Avant de présenter les étapes essentielles d'un apprentissage conduisant à la maîtrise de la proportionnalité, il est important de mettre en évidence un simple fait : un même thème d'activité, un même problème, peut être exploité à des niveaux très différents.
En voici deux exemples :

Exemple 1. Le produit 13×18 est plus petit que le produit 14×17.

Deux morceaux rectangulaires découpés dans un même carton et une balance à deux plateaux suffisent pour un constat. L'exécution des deux produits, soit à la main, soit à l'aide d'une machine (ce qui est ici plus rapide), entraînera la conviction de quiconque. Mais le mathématicien ne verra dans l'un comme dans l'autre aucun germe d'explication mathématique, c'est-à-dire d'éléments rendant le phénomène évident en soi. L'utilisation de variables, si l'on pose par exemple $a = 13$ et $b = 17$, conduit à une généralisation en même temps qu'à une "trivialisation" satisfaisante :

$$a(b + 1) = ab + a$$

et

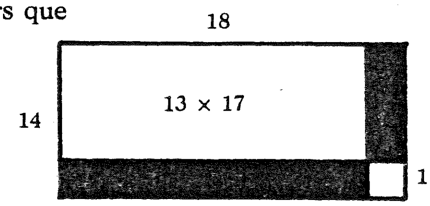
$$(a + 1)b = ab + b$$

Mais on a changé d'objets mathématiques et donc peut-être de niveau scolaire auquel proposer l'étude.
Le recours à une représentation peut ne pas avoir cet inconvénient dans le cas présent : le dessin superposé de deux rectangles de dimensions convenables fait envisager de façon naturelle le "grand" rectangle 14×18 qui constitue le cadre du dessin. Il apparaît alors que

$$13 \times 18 = 14 \times 18 - 18$$

et

$$14 \times 17 = 14 \times 18 - 14,$$



Bien sûr, les égalités correspondant à l'étude précédente auraient aussi pu être vues sur cette même représentation :

$$13 \times 18 = (13 \times 17) + 13 \times 1$$

et

$$14 \times 17 = (13 \times 17) + 1 \times 17.$$

En changeant à la fois d'objets et de contrôle, on peut par exemple se ramener au fait que la fraction 13/14 est plus petite que 17/18, et ceci se voit mentalement pourvu que l'on dispose de la représentation usuelle d'une fraction inférieure à 1 comme d'un rapport partie-tout. Ici encore on aura pu changer de niveau scolaire par rapport à l'étude précédente, en changeant d'objet.

Note : La taille des entiers en jeu peut éventuellement servir de "variable didactique" pour rendre les calculs plus "coûteux" que dans l'exemple donné.
Par exemple, la comparaison de 7 654 321 × 2 345 678
et 7 654 320 × 2 345 679
est de nature à rendre le calcul des produits (même à la machine) long et risqué.
On peut aussi jouer sur le nombre d'opérations, en proposant par exemple de faire intervenir 12 × 19 et 15 × 16 en même temps que 13 × 18 et 14 × 17, ou même davantage encore de produits du même genre.

Exemple 2. En cinq minutes une machine d'imprimerie effectue le tirage de 50 journaux.

Extrait de l'évaluation du SIGES (1980 ; classes de sixième) publiée dans Études et documents n° 82-2, numéro spécial, Ministère de l'Éducation Nationale.

B/7 - Proportionnalité directe et inverse
En cinq minutes une machine d'imprimerie effectue le tirage de 50 journaux.
Complétez les tableaux.
(Laisser cinq minutes).

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5 5	1 3	50

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1 5	50 50

minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1 2	50 500

Les réponses codées 1	Les références des savoirs impliqués
150 1 25	1. 2. 3.

La phrase ci-dessus constitue la donnée à partir de laquelle le Service des Études Informatiques et Statistiques du Ministère de l'Éducation Nationale a fabriqué plusieurs questions proposées à des élèves de 6ème constituant un échantillon représentatif. L'énoncé de chaque question est constitué d'un tableau à trois colonnes : Minutes, nombre de machines, nombre de journaux. De plus, il y a deux lignes, la première rappelant la donnée et la seconde comportant un trou à remplir. La dernière question demande de déterminer le nombre de minutes nécessaires à 2 machines pour tirer 500 journaux. Elle est réussie par moins de 25 % des élèves interrogés, tandis que la question importante sur le nombre de journaux tirés en 5 minutes par 3 machines donne lieu à une réussite quasi totale.
Dans ce cas, un changement du but assigné à l'activité peut être envisagé : Représenter sous forme d'un tableau le nombre de journaux tirés en fonction du nombre de minutes et du nombre de machines. Cette présentation, qui respecte les rôles des variables en jeu, contrairement aux tableaux de l'énoncé qui ne sont pas des tableaux "de travail", est la même que celle précédemment indiquée (cf. 3.2.). Elle permet de répondre à des questions variées sans par exemple introduire de variables qui ne seraient pertinentes qu'à un autre niveau scolaire.
Le principe d'enseignement "en spirale" tient compte de la multiplicité des activités mathématiques sur un même thème, que le point de vue des structures peut conduire à méconnaître. Par exemple, la construction purement mathématique des rationnels se fait sans demi-mesure : ils naissent tout armés de leur structure de corps commutatif ! Au contraire, il paraît souhaitable d'introduire progressivement des fractions, répondant aux besoins créés par des problèmes accessibles à un niveau donné, et choisis pour cela par l'enseignant. Notons que l'accessibilité n'est pas indépendante de la façon dont les élèves sont sollicités. Ce principe d'enseignement tient également compte de la variété des compétences individuelles des élèves.

4.2. Les niveaux d'apprentissage

Les niveaux d'apprentissage présentés ci-dessous ne doivent pas être associés à une organisation figée de l'école dans son état actuel. Toutefois, si on les compare aux programmes actuels du primaire et du collège, ils se répartiraient de la manière suivante :

Niveau 1 : Cours préparatoire et début du cours élémentaire
Niveau 2 : Cours élémentaire et début du cours moyen
Niveau 3 : Fin du cours moyen et cycle d'observation
Niveau 4 : Fin de la scolarité obligatoire

Mais ces niveaux sont purement indicatifs. L'expérience montre que certains décalages importants peuvent subsister : il arrive que des élèves de 6e soient encore sur certains points au niveau 2 ; il faut alors leur proposer des activités de ce niveau.
A chaque niveau, un certain nombre d'objectifs sont visés simultanément, et cela, pour leur conférer du sens. Les uns seront atteints relativement vite alors que d'autres exigeront une longue durée d'élaboration. C'est pourquoi, il est important à chaque étape de travailler particulièrement les enchaînements et la coordination d'activités déjà sollicitées et cela, au sein de situations plus complexes que celles déjà rencontrées.

Niveau 1

Les activités à introduire dès les premières années de la scolarité sont les suivantes :

1) Activités de calcul mettant en jeu les divers moyens dont peut disposer l'élève : calcul oral et procédures de comptage, calcul sur papier et sur machine. L'explicitation des procédures est essentielle.

2) Opérations sur les longueurs : juxtaposition et reports puis (en CE1) introduction des opérations "doubler" "partager en deux" non seulement sur des grandeurs discrètes mais aussi pour des longueurs, des masses, des durées. Les activités de comparaison sont fondamentales.

3) Nécessité d'une unité et choix d'une telle unité. Formulations parallèles d'un problème en termes de grandeurs et en termes de nombres.

Niveau 2

Observation et expérimentation numériques et développement des activités précédemment introduites :

1) Utilisation des notations fractionnaires $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... pour désigner des mesures de longueurs, de masses, telles que

$$l + l = 2 \times l = 1\ u \quad \text{ou} \quad l' + l' + l' + l' = 4 \times l' = 1\ u$$

ou $\quad l'' + l'' = \frac{1}{2}\ u \quad$ donc $\quad 2 \times (2 \times l'') = 1\ u \quad$ et donc $\quad l'' = \frac{1}{4}\ u.$

Traduction numérique des relations précédentes, comme dans

$$2 \times a = 1 \quad \text{donc} \quad a = \frac{1}{2}.$$

2) Graduation d'une demi-droite (d'origine O, avec une unité choisie) en nombres entiers et applications.
Exemple d'exercice : Situer entre deux entiers consécutifs des fractions telles que $\frac{11}{2}$, $\frac{15}{4}$, $\frac{28}{3}$, ...
Identification entre le point de graduation n et le point à la distance nu de l'origine.

3) Activités de présentation de données correspondant à deux variables, sous diverses formes : listes, tableaux, graphiques.
Lecture et production d'informations pour diverses relations entre variables, notamment pour des relations de proportionnalité. Introduction possible à cette occasion d'un symbole littéral pour désigner une variable.

4) Utilisation de l'aire comme grandeur élémentaire (pavage) puis comme grandeur produit (produit de longueurs). Sensibilisation (en termes d'actions) au caractère unidimensionnel des longueurs ou des masses, au caractère bidimensionnel de l'aire comme grandeur produit. Prise en compte de la nature des données dans les relations entre deux grandeurs, en particulier dans les relations de proportionnalité.

5) Utilisation réfléchie des registres de la calculette (calculatrice 4 opérations).
Élaboration et justification des algorithmes de calcul "papier - crayon". (L'objectif d'une fiabilité totale dans la pratique de ces algorithmes a, lui, perdu aujourd'hui de son importance d'autrefois).

Niveau 3

Dans cette étape, les élèves vont avoir à étendre le champ numérique sur lequel ils savent opérer, en même temps que le domaine de validité des relations qu'ils savent faire agir, qu'il s'agisse de situations courantes ou de situations mathématiques (géométriques, numériques ou autres).

1) Organisation de données : tableaux croisés donnant un résultat en fonction de deux variables indépendantes, avec l'examen de sous-tableaux qui s'en déduisent.

2) Extension des fractions et en particulier des fractions décimales pour désigner des mesures de grandeur et aussi des coefficients de proportionnalité.
Encadrement d'une fraction par deux entiers consécutifs en la situant sur une demi-droite graduée en nombres entiers.
exemples : $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{23}{5}$, $\frac{35}{10}$, ... $\frac{225}{100}$ ..., $\frac{253}{253}$, ...
Enrichissement de la graduation à l'aide des demis, des dixièmes. Introduction des identifications essentielles :

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5 \,; \qquad \frac{23}{5} = \frac{(4 \times 5) + 3}{5} = 4 + \frac{3}{5} = 4 + \frac{6}{10} = 4{,}6 \ldots ;$$
$$\frac{35}{10} = 3 + \frac{5}{10} = 3{,}5 \,; \qquad \frac{225}{100} = 2 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 2{,}25 \,;$$

$$a \xmapsto{:\,2} b = a : 2 = \frac{a}{2} = a \times \frac{1}{2} = a \times 0{,}5 \,;$$

$a \xmapsto{:\,2} b$ n'est autre que $a \xmapsto{\times \frac{1}{2}} b$ ou $a \xmapsto{\times\, 0{,}5} b$;
$\frac{a}{2}$ est le nombre b tel que $b \times 2 = a$;

$a : 2$ et $a \times 0{,}5$ désignent le même nombre b tel que $b \times 2 = a$.

3) Calcul sur les fractions ; utilisation systématique d'égalités comme :

$$5 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} = 2{,}5 \,; \qquad \frac{2}{7} \times 11 = 11 \times \frac{2}{7} = \frac{22}{7} \,; \qquad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{34}{51}, \ldots$$

Introduction d'écritures du type $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3 \times 4} = \frac{1}{6}$, grâce à des enchaînements :

$a = \frac{2}{3} : 4$ est tel que $a \times 4 = \frac{2}{3}$ ou $a \times 2 = \frac{1}{3}$ et donc $a = \frac{1}{6}$, ou encore :

$a \times 4 \times 3 = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ et $a = \frac{2}{4 \times 3}$.

4) Introduction systématique du coefficient de proportionnalité, c'est-à-dire de l'aspect fonctionnel (cf 1.3.) ; sa composition de proportionnalité ; sur des cas simples, introduction de l'inverse d'un coefficient de proportionnalité. En particulier, si $x \longmapsto a \times x$ correspond à un agrandissement, alors $x \longmapsto \frac{1}{a} \times x$ correspond à une réduction.

5) Utilisation de variables dans des formules.

6) Repérage ou rejet de proportionnalité en liaison avec quelques situations (ex : proportionnalité à l'inverse, accroissements proportionnels, ...), et mise en œuvre de quelques critères. Bien entendu, on continue à travailler sur masse-volume, quantité-prix, vitesse-distance, échelles, pourcentages, etc.

Niveau 4

Le niveau suivant est celui de la mise en place progressive des outils algorithmiques et algébriques de traitement des situations de proportionnalité. Jusque-là, ce sont essentiellement des outils de description et de modélisation en prise constante avec le contexte de la situation, qui auront pu servir aux traitements : description par le langage avec recours au sens des opérations, représentations, organisations en tableaux avec les opérateurs associés. On a vu les bénéfices possibles pour ces activités de l'introduction précoce de grandeurs perçues comme continues et des manipulations sur ces grandeurs en interaction avec la traduction numérique. Mais il arrive un moment où les traitements mathématiques sont amenés, pour être efficaces, à s'écarter de la référence constante aux objets de la situation initialement envisagée. Il en est ainsi du "produit en croix" (technique algorithmique) et de la libre manipulation des fractions (technique algébrique), pour transformer l'égalité
$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ en $cx = ab$ ou en $x = \frac{ab}{c}$ (cf. 1.3. et 1.6.).

Pour accepter de ne pas interpréter chaque étape des calculs (numériques ou algébriques) en référence à la situation envisagée, et c'est un des aspects de la démarche "formelle", il est nécessaire de pouvoir contrôler la validité des résultats obtenus, de développer des démarches de preuves : par l'action, par la confrontation de résultats obtenus par des méthodes différentes, par le raisonnement, par l'étude des

conséquences qu'un certain résultat admis entraîne... Certaines de ces démarches ne sont pas nouvelles. A défaut, on ne peut espérer, au mieux, que l'exécution correcte d'algorithmes dépourvus de signification pour ceux qui les pratiquent.
Il s'agit donc de promouvoir une certaine formalisation des êtres numériques utilisés, des variables et des fonctions associées : f(x) et f (x, y), des égalités et inégalités, des quelques éléments de logique utilisés dans le travail sur machine, mais tout cela avec la préoccupation permanente d'en justifier le bien-fondé, la pertinence au service de multiples problèmes mathématiques et autres. Autrement dit, il s'agit de provoquer le fonctionnement des notions citées, comme outils pour résoudre des problèmes portant sur des domaines de référence qui évoluent et s'enrichissent. C'est pourquoi il faut assurer le suivi tout au long de l'enseignement des collèges de notions comme celle de l'aire, de la vitesse d'un mobile sur une trajectoire donnée, d'angles dans un triangle, d'agrandissement et de réduction d'un dessin, de dimension d'une grandeur (dimension 1 pour les longueurs, 2 pour les aires, 3 pour les volumes). Toutefois le traitement complet des pourcentages (itération, évolutions comparées, ...) suppose une certaine maîtrise du calcul algébrique, et ne peut être systématisé qu'à la fin de cette période. Et surtout, on peut se permettre d'économiser considérablement sur tous les calculs et les manipulations répétitives d'écritures que les machines font très bien : c'est leur emploi à bon escient qui compte. Cela, cependant, ne dispense pas de chercher une signification aux résultats numériques fournis, un à un à la demande, par la machine.

Extensions

En fin de période, des extensions et des discussions autour de la proportionnalité pourront être amorcées pour être poursuivies au niveau des lycées : l'expérimentation des divers modes de croissance, linéaire, polynomiale, exponentielle, factorielle, l'interpolation et l'extrapolation, le problème de l'approximation. Mais toutes ces études n'ont de sens que pour des élèves familiarisés avec l'emploi d'une méthode standard, de préférence la manipulation de formules algébriques augmentée d'éléments algorithmiques, pour traiter une situation générale de proportionnalité, sans avoir perdu la possibilité du recours au sens ou à une représentation dans des cas particuliers.

4.3. Indications d'évaluation

Sans entrer dans les détails, il est possible de schématiser comme suit les objectifs généraux du cycle élémentaire et du premier cycle secondaire, pour ce qui est de la proportionnalité.

— En fin d'école élémentaire on peut demander le choix d'un moyen approprié de description d'une dépendance linéaire. Les traitements exigibles sont uniquement ceux qui traduisent directement une telle description. Les êtres numériques en jeu sont les entiers naturels, les nombres des machines et les fractions avec leur multiplication, plus précisément, entre autres : les demis, les quarts, ... et les fractions décimales.

— En fin de scolarité obligatoire, les situations usuelles de proportionnalité, d'origine physique ou conventionnelle (réglementaire par exemple comme la T.V.A.), doivent être connues. Leur traitement général doit être possible, de préférence avec recours à des variables littérales, qui peuvent être disposées en tableau, représentées graphiquement avec un choix de graduation adapté au problème, ou incorporées à des égalités de fractions ou combinaisons de fractions. Ainsi l'effet d'une augmentation de x pour cent doit pouvoir être écrit sous la forme d'une multiplication par $(1 + \frac{x}{100})$. Tous les calculs numériques peuvent être exécutés à la machine.

Ces objectifs sont des objectifs minimaux, et non des objectifs de formation. Leur modestie, si tant est que d'aucuns les trouvent modestes, n'est qu'apparente. Par rapport à la situation actuelle, ils méritent même d'être considérés comme ambitieux si l'on veut qu'ils soient atteints par la quasi totalité de la population scolaire.

5. APPLICATION : QUELQUES INDICATIONS SUR DES EXEMPLES DE SCÉNARIOS D'ENSEIGNEMENT

Afin d'illustrer les idées précédemment présentées, quelques exemples ont été retenus. Sans les développer complètement, il s'agit de montrer les questions qu'ils font surgir, les traitements auxquels ils conduisent et les apprentissages qu'ils permettent de mettre en place dans de bonnes conditions d'appropriation. Il va de soi que le choix s'est porté sur des exemples qui ont fait l'objet d'expérimentation.

5.1. Périmètre et aire de rectangles

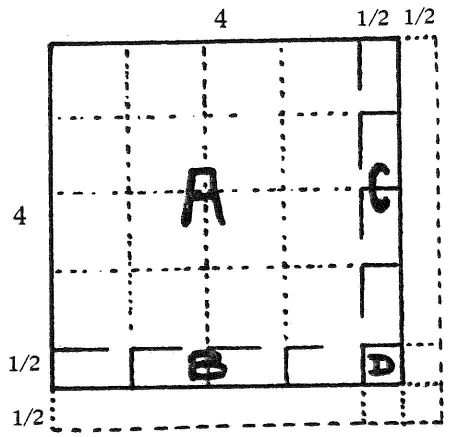
Plaçons-nous à un moment de l'apprentissage* où les élèves ont une certaine familiarité avec les entiers (opérations $+$, $\times$ et ordre) et ont une connaissance de petites fractions, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et les multiples entiers comme addition itérée ($\frac{1}{2}$ désigne le nombre a tel que $a + a = 2 \times a = 1$;
de même que $\frac{1}{4}$ désigne le nombre tel que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{4} = 1$ mais ils ne connaissent ni les décimaux, ni la multiplication de 2 fractions. Ils savent aussi calculer l'aire d'un rectangle pour des valeurs entières des dimensions et savent qu'un carré est un rectangle particulier.

On pose le problème suivant :

— Trouver des rectangles dont le demi-périmètre est 9 cm.
— Parmi ces rectangles, y a-t-il un carré ?
— Pour chacun d'eux, calculer l'aire.

Nous n'allons examiner ici que la recherche du carré et le calcul de son aire en cm².
Admettons que le calcul de la dimension du carré, dans un tel contexte de classe, ne pose pas de difficulté : il s'agit de trouver un nombre dont le double est 9. La procédure majoritaire est : $4 + 4 = 8$, encore 1 à partager en 2. Pour le carré, c'est $4 + \frac{1}{2}$.

Le point de la situation : pour un carré de 4 c'est 16 cm², pour un carré de 5, c'est 25 cm².



Représenter le problème est un moyen d'avancer :
L'aire cherchée se décompose en 4 parties correspondant à A, B, C, D.

pour A : $4 \times 4 = 16$ aire de A : 16 cm²
pour B et C : $4 \times \frac{1}{2} = 2$ aire de B, aire de C : 2 cm²
pour D : ?

Or, il y a 4 copies de D dans le carré du coin en bas à droite qui est de dimension 1 cm. La recherche de l'aire de D revient au problème numérique suivant : trouver un nombre a tel que $a + a + a + a = 1$. La solution est connue c'est $a = \frac{1}{4}$.

Par retour dans le formulation grandeur, on obtient : aire D $= \frac{1}{4}$ cm². On peut maintenant calculer l'aire du carré de dimension $(4 + \frac{1}{2})$ cm, c'est aire A + aire B + aire C + aire D =

$$16 \text{ cm}^2 + 2 \text{ cm}^2 + 2 \text{ cm}^2 + \frac{1}{4} = (20 + \frac{1}{4}) \text{ cm}^2$$

(ou, en cm² : $16 + 2 + 2 + \frac{1}{4} = 20 + \frac{1}{4}$).

Le changement de formulation du problème et l'aller-retour grandeurs-nombres, par l'intermédiaire de la représentation (dans laquelle on a choisi de mettre en avant la partition pour cerner l'inconnu permet de poser la question de l'extension de la multiplication.

Quelle valeur attribuer à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pour que cette expression traduise encore l'aire en cm² du carré de dimension $\frac{1}{2}$ cm, autrement dit pour que la mesure de l'aire s'obtienne encore en faisant le produit $a \times a$ (a mesure du côté) comme pour les entiers ? La réponse est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

La convention que nous venons de poser est (ou peut être vue comme) le germe de l'extension de la multiplication aux nombres rationnels et aux nombres décimaux. En effet, au point de l'apprentissage où nous sommes, résumons les contraintes :

* *L'exemple est extrait d'une expérience faite à l'école primaire.*

- $\frac{1}{n}$ désigne le nombre a tel que $\underbrace{a + ... + a}_{n \text{ termes}} = n \times a = 1$

- $\underbrace{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{p \text{ termes}} = p \times \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$

- On peut paver un carré de côté 1 cm avec p × q rectangles de dimension $\frac{1}{p}$ cm × $\frac{1}{q}$ cm.
- Par ailleurs, les élèves dans leur grande majorité mettent en œuvre comme règle d'action, d'eux-mêmes, le fait que l'aire d'une surface constituée de plusieurs morceaux disjoints ou juxtaposés (sans chevauchement) est la somme des aires des morceaux : ce que nous appelons la propriété d'additivité des aires.

Il résule de tout cela qu'un rectangle de dimension $\frac{1}{p}$ cm × $\frac{1}{q}$ cm a pour aire $\frac{1}{p \times q}$ cm².
Étendant la multiplication aux rationnels de manière qu'elle traduise encore le calcul de l'aire d'un rectangle connaissant ses dimensions,
on est conduit à poser $\frac{1}{p} \times \frac{1}{q} = \frac{1}{p \times q}$.
On en déduit $\frac{k}{p} \times \frac{m}{q} = (k \times m) \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{q} = \frac{k \times m}{p \times q}$.

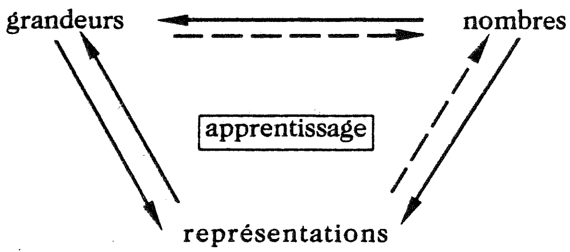
Exemple : calculer l'aire du rectangle de dimensions $(4 + \frac{3}{8})$ cm et $(4 + \frac{5}{8})$ cm.

Elle se décompose en 4 morceaux :

un carré	4×4	16 cm²
un rectangle	$4 \times \frac{5}{8} = \frac{20}{8} = 2 + \frac{4}{8}$	$(2 + \frac{1}{2})$ cm²
un rectangle	$4 \times \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1 + \frac{4}{8}$	$(1 + \frac{1}{2})$ cm²
un rectangle	$\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$	$\frac{15}{64}$ cm²

au total $(20 + \frac{15}{64})$ cm²

Dans le cadre numérique, c'est le mise en œuvre **implicite** de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, mise en œuvre rendue possible par la force de conviction provenant de la formulation géométrique, mais aussi par l'incitation à pratiquer des allers-retours ainsi que l'illustre le schéma suivant.

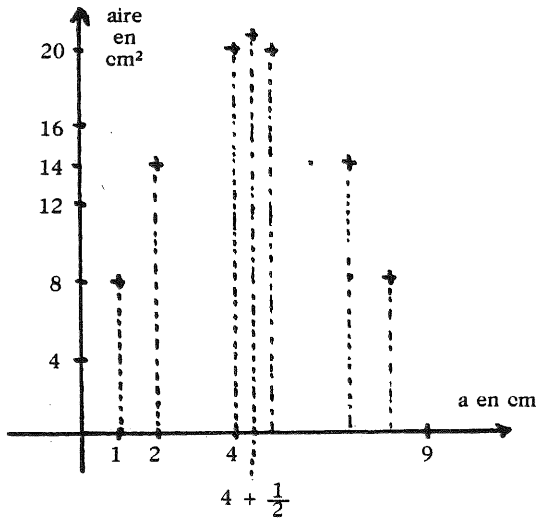


Remarque : Là où les représentations adéquates dépendent du problème posé, c'est-à-dire **à la fois** des données, des questions posées et des connaissances des élèves, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.

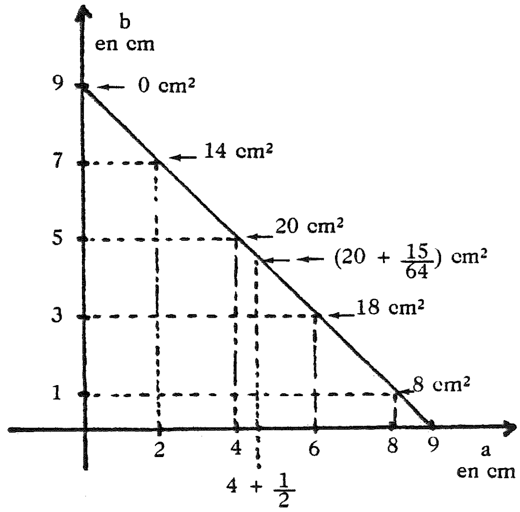
Exemple : reprenons l'objectif d'apprentissage qui nous occupe : l'étude de la variation de 2 grandeurs, l'une en fonction de l'autre.
A partir des données du problème précédent (recherche d'aires de rectangles de demi-périmètre 9 cm), la question — comment varie l'aire des rectangles ? — auprès d'élèves ayant une certaine habitude des représentations graphiques, inciterait aux représentations qui suivent (il ne s'agit plus de s'intéresser aux rectangles isolés — pour chacun d'eux, calculer l'aire — mais de comparer les aires dans leur ensemble).
Une représentation intéressante peut être un tableau,

dimensions en cm²	(3, 6)	(2, 7)	(1, 8)	$\frac{1}{2}$, $8 + \frac{1}{2}$	(a, b)
aire en cm²	18 cm²	14 cm²	8 cm²	$(4 + \frac{1}{4})$ cm²	(a × b) cm²

mais elle est insuffisante car elle ne permet d'insérer de nouvelles informations entre 2 colonnes. Une autre représentation consiste, à partir du tableau, de représenter les couples (dimension, aire) par des points d'un quadrillage gradué ou encore les couples (a, b) en notant à côté de chacun l'aire correspondante.



avec la contrainte a + b = 9
la relation $a \longmapsto a \times b$
est-elle une proportionnalité ?



la relation $a \longmapsto b$
est-elle une proportionnalité ?

Autre problème : on fixe a, autrement dit une dimension du rectangle : disons 7 cm. On fait varier l'autre dimension du rectangle. Comment varie l'aire ?

5.2. Problèmes de vitesse moyenne

On sait que la vitesse est l'une des grandeurs quotients les plus accessibles, sous la forme intuitive de vitesse instantanée d'un mobile par rapport à un référentiel que l'observateur conçoit comme immobile de façon absolue. C'est ainsi que des bateaux vont "évidemment" moins vite en remontant un fleuve qu'en le descendant. Bien sûr, cette conception naïve constitue un obstacle que les physiciens doivent s'employer à renverser, pour mettre en place les bases de la mécanique. Mais avant même d'en arriver là, on rencontre, dans les études qui s'en tiennent à un référentiel terrestre non discuté, une réflexion sur les liaisons entre vitesses, durées et distances qui peut déjà provoquer des surprises. La plus "classique" est la suivante : une heure de route à 80 km/h suivie d'une heure à 100 km/h font parcourir la même distance que deux heures à 90 km/h ; mais un mobile qui parcourt la moitié d'un tronçon à 80 km/h puis la seconde moitié à 100/h met plus de temps à parcourir le tronçon qu'un mobile qui se déplace constamment à 90 km/h. Faut-il attendre de disposer d'une bonne maîtrise de variables littérales, d'idées avancées sur des moyennes pondérées ou non, pour étudier de telles questions de façon quelque peu générale ? Ce serait dommage de se priver ainsi d'une rencontre avec la "non linéarité née d'une linéarité" (du point de vue numérique, le résultat revient à ce que la moyenne des inverses diffère de l'inverse de la moyenne). Or l'enseignement doit faire manipuler des cas autres que la proportionnalité (cf. 2.5.). Le recours aux représentations graphiques permet une telle manipulation pour les vitesses, au niveau du collège. Détaillons le problème suivant : «La distance entre deux gares A et B est 110 km. Un train effectue un parcours aller-retour entre A et B. A l'aller, il met 45 mn. Au retour, à cause d'une panne qui l'oblige à s'arrêter, il met 3 h 15 mn. Quelles sont ses vitesses moyennes : V_1 à l'aller, V_2 au retour, V sur l'aller-retour ? Interpréter V par rapport à V_1 et V_2.»
Les unités étant choisies (distances en km, durées en h), nous désignerons encore par V_1, V_2, V les mesures des vitesses en km/heure.

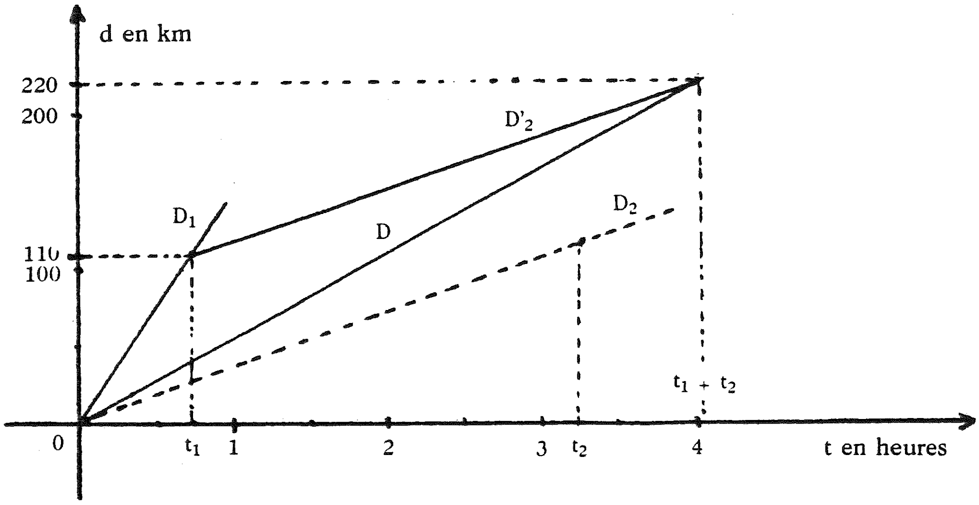
On a $110 = V_1 \times \frac{3}{4}$ d'où $V_1 = \frac{440}{3} \simeq 146{,}67$

$110 = V_2 \times \frac{13}{4}$ $\qquad V_2 = \frac{440}{13} \simeq 33{,}85$

$220 = V \times 4$ $\qquad V = 55$

Remarquons que V est très différent de $\frac{V_1 + V_2}{2}$.

Interprétation et exploitation graphique



Notons D_1 la représentation du mouvement du train à l'aller en supposant qu'il roule à vitesse constante et D_2 celle du mouvement au retour avec aussi l'hypothèse de vitesse constante, V_1 est représentée par la pente D_1 et V_2 par la pente de D_2. La vitesse V est alors représentée par la pente de D.

Imaginons des pannes de plus en plus longues au retour. Cela se traduirait graphiquement par une pente de plus en plus faible pour D_2, donc pour sa parallèle D'_2, donc pour D jusqu'à être nulle. Or la moyenne des vitesses c'est-à-dire $\frac{V_1 + V_2}{2}$, ne peut être inférieure à $\frac{V_1}{2}$. Mais V_1 étant fixée, ceci implique que la moyenne des vitesses ne peut pas être arbitrairement petite. Ainsi le graphique permet de se convaincre que la vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses. Mais il n'apporte pas d'explication à ce fait, et donc ne permet pas de mieux comprendre la relation entre V_1, V_2 et V.

Pour cela, il faut revenir au sens de la vitesse moyenne dans le contexte du mouvement. La vitesse moyenne est celle d'un mobile (train fictif ici) qui aurait effectué l'aller-retour dans le temps $t_1 + t_2$ en roulant régulièrement à l'aller et au retour sans s'arrêter (ceci est noté sur la représentation graphique). Ce mobile aurait donc mis le même temps t pour l'aller et pour le retour. Le graphique peut fournir cette indication si on l'interroge, mais alors c'est que l'on a déjà bien analysé la situation ; dans ce cas, on n'a peut-être plus tellement besoin de lui pour comprendre. Le temps t est égal à $\frac{t_1 + t_2}{2}$. Si l'on désigne par d la distance entre A et B, on sait que

$$t_1 = \frac{d}{V_1} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{d}{V_2} ;$$

pour ces égalités, la représentation graphique peut servir à contrôler (il y a alors changement de son rôle dans la situation), auprès d'élèves non rompus au calcul littéral. De même :

$$t = \frac{d}{V}.$$

On aboutit ainsi à :

$$\frac{d}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{V_1} + \frac{d}{V_2}\right).$$

Par suite (grâce à la distributivité) :

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right).$$

Cette formule permet de voir que si V_2 est beaucoup plus grand que V_1, V ne diffère pas beaucoup de $2V_1$ (d'où le constat des coureurs, cf. 1.6.). Au niveau du collège, cette formule de moyenne harmonique a un intérêt par contraste, en montrant que $V \neq \frac{V_1 + V_2}{2}$, et non encore en soi-même.

5.3. Agrandissements et réductions

Problème* : agrandir ou réduire selon le cas un puzzle du genre "tangram" en respectant la consigne suivante :

1er puzzle 12,5 cm $\longmapsto$ 25 cm
2e puzzle 12,5 cm $\longmapsto$ 10 cm.

Nous avons observé les procédures suivantes : dans le premier cas, toutes les dimensions sont multipliées par 2 et les nouvelles pièces s'organisent en un puzzle satisfaisant. Cela n'étonne personne dans la classe. Dans le 2e cas, la première procédure de soustraire 2,5 cm à chacune des dimensions. Avec cette règle de transformation, ou bien les pièces sont construites mais ne respectent pas la forme et sont rejetées ou bien ne sont pas terminées. De plus que faire correspondre à 2 cm : ou bien on change la règle ou bien on ne peut pas. La règle est rejetée. Il faut en trouver une autre. L'examen de la procédure utilisée pour construire le premier puzzle ne permet pas d'aboutir à une nouvelle proposition. Le progrès vient d'un recours au point de vue "isomorphisme".

On observe des listes 12,5 cm $\longrightarrow$ 10 cm
25 cm $\longrightarrow$ 20 cm
6,25 cm $\longrightarrow$ 5 cm

puis 50 $\longrightarrow$ 40
5 $\longrightarrow$ 4

Le groupe d'élèves chargé de la construction du puzzle reconnaît alors une proportionnalité et veut trouver "qui multiplié par 5 donne 4". Une élève du groupe écrit $5 \times a = 4$

$$a = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Alors s'opère un retour explicite au point de vue "fonction" de la proportionnalité (il était implicite dès la formulation 50 $\longmapsto$ 40, 5 $\longmapsto$ 4) "maintenant on sait, il faut tout multiplier par 0,8".

Du point de vue de l'élève, la procédure qu'il est susceptible d'engager dépend bien sûr des outils mathématiques dont il dispose, mais aussi des contextes qu'il va devoir modéliser. Les exemples ne manquent pas qui mettent en jeu des prix, des consommations, des productions, des vitesses, des masses volumiques... On observe un privilège du recours à la procédure "isomorphisme" aussi dans des situations où la grandeur quotient est familière (F/kg ou km/heure) et dans les cas où elle est un rapport numérique (échelle) mais pour bien comprendre les raisons du choix de la procédure, il faut connaître exactement le problème posé et les conditions dans lesquelles il a été posé (qu'apprenaient les élèves à ce moment là...).

★

* *adaptation d'une situation présentée dans : Recherches en Didactique des Mathématiques, p. 70, vol. 2.1., La Pensée Sauvage, Grenoble, 1981.*

LE CALCUL NUMÉRIQUE

1. LA PLACE DU CALCUL NUMÉRIQUE DANS LA VIE ET DANS L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

1.1. Calcul au quotidien

En tout lieu où effectuer des calculs est une activité courante (magasin, banque, entreprise, administration, ...), on trouve des machines à calculer. On pourrait dire qu'aujourd'hui, là où il y a calcul, il y a calculatrice.

Pour notre part, demandons-nous où et quand, dans quelles circonstances, nous avons pour la dernière fois eu à effectuer une multiplication ou une division "à la main", en dehors d'une situation d'enseignement. D'un autre côté, comparons avec toutes les situations courantes où le calcul numérique tient une place, ou aurait lieu d'en tenir une : décisions d'achat entre plusieurs objets, produits ou services, choix entre plusieurs modalités d'emprunt ou au contraire d'investissement, évaluations diverses (pour du jardinage, du bricolage, de la couture ou du tricot, des recettes de cuisine avec les fournitures correspondantes, des prévisions de dépense d'électricité, gaz, ...). Si c'est une question de gestion professionnelle qui se présente, que ce soit dans le monde de l'agriculture, de l'artisanat, du commerce ou de l'entreprise, alors le calcul numérique s'impose comme une absolue nécessité.

Au quinzième siècle, savoir faire une division donnait le pouvoir. Dans l'école de Jules Ferry, il y a un siècle, c'était sans doute une promotion sociale de savoir bien calculer (ce qui voulait dire faire des opérations sans faute). Aujourd'hui, ce qu'il faut, c'est savoir organiser des données pour pouvoir les traiter, organiser des calculs et les effectuer le plus efficacement possible à l'aide des machines dont on dispose, avoir des moyens de vérifier les résultats, être capable de déterminer rapidement (ce qui ne signifie pas forcément sans papier ni crayon) l'ordre de grandeur d'un résultat ou d'une approximation. On remarquera que toutes ces connaissances et tous ces "savoir-penser" n'ont que peu à voir avec la bonne exécution à la main des techniques opératoires traditionnelles. Mais, en définitive, les machines ne font qu'amplifier une nécessité d'organisation. Sans les calculatrices, tout calcul non élémentaire demandait déjà une organisation, que ce soit pour permettre l'exécution ou pour la contrôler.

Pour illustrer ce propos, on peut envisager une situation de comparaison. Souvent une décision oblige à prendre en compte plusieurs paramètres (prix, mais aussi coût au fonctionnement, entretien, services à attendre, ...), mais on peut se limiter pour la simplicité à considérer une comparaison ne faisant intervenir que quantité et prix. Avant la promulgation de l'actuelle règlementation d'affichage des prix, une telle situation de comparaison se présentait effectivement au consommateur client d'une grande surface (lieu peu propice à la réflexion méthodique, on en conviendra, d'où d'ailleurs l'obligation d'afficher désormais les prix au kilo). Comment alors résoudre de tête l'exemple suivant ?

> De la lessive est conditionnée :
> — en paquets de 550 g vendus 10 F
> — en paquets de 820 g vendus 16 F.
> Quels paquets est-il plus avantageux d'acheter ?

(Note : ces conditionnements existent effectivement).

On peut raisonner soit sur des grandeurs : quantités à prix égal ou prix à quantité égale, soit sur des rapports : quantité/prix ou prix/quantité, soit en utilisant une proportionnalité (en cherchant par exemple

combien coûterait un paquet de 820 g vendu au tarif des paquets de 550 g). Le dernier raisonnement indiqué demande d'effectuer la division de 10 par 550 puis de multiplier le résultat par 820 ; c'est le genre de calcul qui s'effectue à la machine de nos jours. Mais, de tête, on peut remarquer qu'avec 30 F, on achète 3 paquets de 550 g et pas tout à fait 2 de 820 g ; et 3 fois 550 g font 1650 g (calcul mental simple), ce qui est plus que 2 fois 820 g, soit 1640 g. Ainsi, dans cet exemple, les petits paquets sont plus avantageux.
Le même résultat peut s'obtenir aussi bien par comparaison des rapports quantité/prix, c'est-à-dire 550/10 = 55 et 820/16 = 410/8, ce dernier rapport s'évaluant de tête comme inférieur à 52 donc à fortiori à 55.
On voit l'intérêt d'une flexibilité de procédures, permettant de choisir une méthode que les données en jeu permettent d'appliquer simplement.

1.2. Calcul scientifique et technique

On imagine difficilement un ingénieur dépourvu de calculatrice. Ce qui compte pour lui, face à une question, est de disposer d'un programme de calcul. S'il en existe un tout préparé, aucun problème ; sinon, il faudra en adapter ou en créer un.
Dans un laboratoire de recherches, la situation est à cet égard la même : aujourd'hui, calculer c'est **élaborer des programmes** de calcul, des algorithmes ; l'exécution des calculs est une phase "mécanique", dont l'intérêt est de fournir des réponses ou des retours alimentant la réflexion.
Le calcul numérique lui-même fait appel actuellement à des concepts mathématiques d'un niveau souvent élevé. Un examen attentif du développement des idées met en évidence que le calcul des probabilités, dont un exemple d'emploi est cité plus loin à propos de simples opérations arithmétiques à la machine, est né au 17ᵉ siècle pour des raisons liées aux traitements numériques : des considérations sur des jeux ont servi de support privilégié à la réflexion, mais c'est en fait la volonté de traiter des résultats numériques entachés d'incertitude qui a été le moteur du changement de pensée. Auparavant d'ailleurs, on parlait d'erreur et non d'incertitude à propos de valeurs expérimentales : c'est Galilée qui écrivit le premier que les erreurs dans les mesures sont inévitables, ce qui amena à l'idée d'incertitude. De nos jours, les probabilités, qui sont devenues une théorie depuis Bernoulli, interviennent dans l'expression même des résultats scientifiques : ceux-ci sont fournis moyennant un seuil de risque indiqué.
En mathématique, les études proprement numériques sont associées à des considérations algébriques avancées. Ce qui est moins connu, c'est que le calcul pur, à l'aide d'ordinateurs éventuellement très puissants, suscite de multiples réflexions théoriques. Dans un article (avril 1984) de la Gazette des Mathématiciens, article dont une très grande partie est tout à fait accessible aux non-spécialistes, J. VIGNES traite de la précision des opérations arithmétiques sur ordinateur : à propos d'une situation aussi simple, on fait appel à la loi de Student bien connue des probabilistes, pour savoir si les résultats que l'on obtient sont dignes de foi. Que l'on se rassure cependant : il n'est pas question d'introduire cette loi dans l'enseignement élémentaire pour vérifier les premières multiplications...
Il est en tout cas tout à fait légitime de souligner que l'usage des machines, bien loin de détruire l'intérêt des questions numériques, leur a donné au contraire une formidable impulsion.

1.3. Imaginer les problèmes actuels

Les problèmes, les questions sont l'aliment naturel de la réflexion mathématique. Or les calculatrices permettent, à tous les niveaux scolaires, d'envisager des problèmes sans rencontrer les obstacles préalables que constituent les risques d'erreur ou la durée des traitements. On trouvera de nombreux exemples dans la deuxième partie de ce texte, dont l'objectif est de fournir quelques indications précises pour l'enseignement et des pistes de réflexion à explorer. Par ailleurs, il vaut la peine de signaler dès maintenant, sans entrer dans les détails, à l'intention de ceux qui croiraient que l'utilisation des calculatrices évite de penser, que :

1) la gestion des nombres par une calculatrice ne peut pas être exempte de défauts mathématiques,
2) l'enchaînement des calculs sur machine ne peut pas suivre toutes les règles d'écriture du symbolisme mathématique usuel.

Il résulte de ces considérations que les calculatrices sont à la fois des outils qui permettent l'exploration de questions que l'on aurait autrefois rejetées, et des outils dont le bon usage soulève des questions qu'il faut à présent étudier. Dans les faits, il risque de s'introduire peut-être plus de questions qu'il n'y en a à éliminer...
Pour l'un et l'autre des deux types de questions évoqués, il y a lieu de rechercher des problèmes adaptés aux divers niveaux scolaires et aux divers secteurs d'enseignement. En effet, le cadre numérique est, en compagnie du cadre géométrique, un "secteur-ressource" d'une importance considérable pour les acquisitions conceptuelles.

Considérons à titre d'exemple l'affirmation suivante.

> Une fonction n'est
> ni un tableau de valeurs,
> ni une représentation graphique,
> ni une suite de touches de calculatrice
> ni une formule.
> C'est tout cela à la fois.

Peu nombreux seront les professeurs qui ne souscriront pas énergiquement à une telle affirmation, mais rares sont ceux qui ont à la fois les moyens et la volonté patiente de la mettre systématiquement en pratique dans leur enseignement. Ainsi, dans combien d'ouvrages scolaires, par ailleurs abondamment fournis en exercices sur les ensembles de définition de fonctions, trouvera-t-on des questions comme la suivante ?

> Indiquer les valeurs du nombre x pour lesquelles on obtient un résultat en introduisant sur une calculatrice scientifique la séquence :
>
> x $\boxed{x^2}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$
>
> Que gagnerait-on à utiliser la séquence de calculs suivante ?
>
> x $\boxed{1/x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

Il ne s'agit pas de militer pour la promotion de ce type précis d'exercices, dont le bien-fondé dépend notamment de l'intérêt ou du manque d'intérêt général d'exercices sur les ensembles de définition, mais de se livrer à un constat de déséquilibre : le plus souvent, l'univers des formules est privilégié en **lui-même**. Or lorsqu'il y a **confrontation** avec d'autres modes de traitement, que rencontreront le technicien, le médecin, le gestionnaire, ..., et pas seulement l'informaticien ou le scientifique lors d'une recherche.
Dès l'école élémentaire, de telles confrontations doivent être **abondamment** prévues si l'on veut qu'elles aboutissent à des effets formateurs. Ainsi, pour indiquer un exemple qui ne déborde pas du cadre numérique pur (même si les confrontations à organiser ne peuvent se limiter à ce cadre), un exercice comme le suivant ne devrait pas être marginal si l'on traite de l'associativité de l'addition en mathématique, mais devrait au contraire tenir un rôle clé.

> Effectuer à la calculette les deux calculs :
>
> a) 407362.5 $\boxed{+}$ 35675.755 $\boxed{=}$ $\boxed{M+}$ 56961.745 $\boxed{M+}$ $\boxed{MRC}$ $\boxed{MRC}$
>
> b) 407362.5 $\boxed{M+}$ 35675.755 $\boxed{+}$ 56961.745 $\boxed{=}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{MRC}$ $\boxed{MRC}$
>
> Expliquer la légère différence de résultats qui apparaît.

Réduit à l'addition de trois nombres, l'exercice est évidemment "fabriqué", pour donner lieu à un défaut d'associativité. Mais il n'est pas artificiel dans la mesure où le problème se pose réellement, lors de la prise en compte de données nombreuses ou, en mathématique, lors de l'obtention de valeurs approchées pour des séries numériques. Au passage, on notera à propos de l'exemple présenté, que le strict respect lors du calcul-machine de l'égalité d'associativité :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

amène à utiliser une mémoire (sinon on utilise aussi la commutativité).

D'une manière générale, la préoccupation de confronter très systématiquement les points de vue théoriques et les calculs effectifs vaut la peine d'être présente lorsque l'on enseigne. Ceci ne signifie pas qu'il faille toujours que cette préoccupation soit répercutée auprès des élèves ; et, dans les cas où cela paraît intéressant, il reste à déterminer pour quel niveau scolaire. Envisageons l'exemple suivant : «En théorie, l'inverse d'un nombre x ne peut jamais être nul. Et pourtant, l'"équation" $\frac{1}{x} = 0$ a des "solutions" sur certaines calculatrices et l'"équation" $(\frac{1}{x})^2 = 0$ a des "solutions" sur toutes les calculatrices actuelles (une "solution" x est un nombre qui peut être entré sur la calculatrice et qui conduit au résultat cherché).» Ce phénomène "d'épaisseur" de zéro en calcul effectif peut paraître intéressant à exploiter au collège ou devoir être réservé au lycée, avec l'étude de variations de fonctions.

1.4. Un paradoxe : le recul du calcul numérique dans l'enseignement général

Les calculatrices de poche se sont répandues rapidement dans tous les domaines où le calcul numérique est nécessaire (en particulier dans l'enseignement commercial) mais leur emploi suscite auprès de nombreux enseignants de mathématique une grande réticence : «Les enfants doivent d'abord calculer à la main avant d'être autorisés à utiliser une calculatrice...» «Les élèves de sixième ne savent même plus leur table de multiplication, alors les calculatrices...». Le sondage auprès d'élèves des classes de quatrième et troisième des collèges en 1984 montre qu'en effet plus de 90 % ont la possibilité de disposer d'une calculatrice mais que moins de 10 % ont appris à s'en servir dans le cadre de l'enseignement. Ne parlons pas des cas rarissimes où des conseils à l'achat ont été donnés par des professeurs (alors que les manuels scolaires qui sont peut-être aussi pernicieux dans leur genre que les calculatrices — puisqu'ils évitent l'effort de tout apprendre par cœur — sont les mêmes dans toutes les classes d'un même établissement)... Anarchie dans le choix des modèles et comportements autodidactes généralisé, avec les défauts inhérents, telle est donc la situation de fait dans la grande majorité des classes en ce qui concerne l'usage des calculatrices.
On peut s'interroger sur les causes de cette méfiance vis-à-vis des calculatrices. Pour certains professeurs, «les élèves deviennent des assistés tributaires d'une machine pour faire le moindre calcul». Pour d'autres, «la calculatrice dispense de tout effort et permet d'arriver trop vite au résultat». Mais le peu d'emploi qui est fait en classe de mathématique n'est-il pas en définitive lié, pour une bonne part, à la faible place faite au calcul numérique ?
On trouve des exemples de cette désaffaction : dans les épreuves de mathématique de l'ex-BEPC et du baccalauréat, qui ne proposent guère d'autre calcul qu'algébrique, dans les épreuves de mathématique des examens de l'enseignement technique même (CAP, BEP, BP). Pour ces derniers examens, le calcul numérique n'est pas absent (factures, devis, ...), mais les données proposées sont choisies pour permettre des calculs rapides et pour aboutir à des résultats "qui tombent juste". Où est le réel ?
La désaffection vis-à-vis du calcul numérique est en définitive facile à comprendre, à partir de la situation "d'avant les machines". En effet, la scolarité commençait par l'apprentissage des quatre opérations arithmétiques. Ensuite, on passait à une phase d'apprentissage du calcul littéral ("l'algèbre"). Il fallait attendre les dernières années de lycée pour avoir les connaissances permettant d'utiliser la règle à calcul et la table de logarithmes.
L'utilisation des machines rendit obsolète celle des instruments précités, ainsi que le savoir correspondant : les anciens problèmes de calcul du niveau terminal des lycées ne sont effectivement que des opérations de pure routine pour l'utilisateur d'une calculatrice scientifique.
De ce fait, et compte tenu de la nécessité d'introduire des notions nouvelles au niveau des lycées (intégration, nombres complexes par exemple), la suppression quasi-complète du calcul numérique s'est produite "naturellement", sans bruit ni protestations.

1.5. Nécessités de la formation des professeurs

On ne peut espérer que soient mises en œuvre de façon efficace dans l'enseignement mathématique des idées qui nécessitent des changements non négligeables d'habitudes intellectuelles, par de simples modifications de programmes ou d'instructions d'accompagnement des programmes. Dans bon nombre de cas, il se trouve que de telles modifications ne seraient même pas nécessaires. En revanche, si l'on veut que l'enseignement mathématique ne marche pas à côté des problèmes de l'existence quotidienne et de l'évolution scientifique et technique, un vigoureux effort de formation est à entreprendre auprès des professeurs actuels et futurs, dans la lignée de celui qui avait conduit en son temps à la création des IREM's. Les

principes alors mis en vigueur seraient valables aujourd'hui encore, alors même que l'enjeu est différent, mais tout aussi important : à l'âge de l'informatique, les mathématiques ont retrouvé un aspect expérimental, sans perdre l'autonomie qu'elles avaient acquise en se dégageant des références physiques. Autrement dit, les concrétisations, les retours lors de mises en œuvre effectives ont aujourd'hui un rôle à jouer dans la réflexion mathématique ; ce ne sont pas que des "applications", mais des pièces constitutives des études entreprises.
Quelques indications générales à propos d'un domaine précis : la géométrie, mettent bien en lumière l'évolution indiquée. On peut dire de la géométrie qu'elle a été la première théorie physique. Puis elle s'est libérée de toute considération à l'environnement, au point que l'on a pu rencontrer des livres de géométrie entièrement dépourvus de figures. Actuellement, le souci de visualisation sur écran d'ordinateur ou sur table traçante conduit à incorporer à la réflexion divers aspects, notamment numériques, liés à des problèmes de représentation (questions de "fenêtre" de représentation et d'échelle bien sûr, mais aussi questions plus théoriques, de paramétrages par exemple).
Une gestion des conséquences, dans l'enseignement des mathématiques, du phénomène d'évolution qui vient d'être sommairement décrit, ne peut être maîtrisée que si elle est envisagée dans le cadre d'actions de formation-innovation. Afin de préciser, on peut passer en revue les transformations que l'usage des calculatrices va introduire, sans même parler des ordinateurs : l'élément-clé, commun aux diverses machines, est l'idée de recours à un **outil** en mathématique.

1.6. Quelques transformations qu'introduiront les calculatrices

Dans l'enseignement actuel, les calculatrices, sans ajouter de nouveaux contenus, peuvent permettre d'aborder différemment certains points des programmes : techniques opératoires, propriétés des opérations, décodage des formules et règles de priorité. Elles peuvent permettre également de débloquer des élèves chez qui l'échec en mathématique est dû aux difficules d'assimilation des algorithmes d'opérations (on constate chez certains élèves ou adultes un regain d'intérêt pour le calcul à la main après un emploi libre de la calculatrice ; ceci correspond à l'accès à l'idée de limitations des possibilités de la calculatrice, idée qui doit pouvoir elle-même être exploitée dans une étape d'acquisition ultérieure, sur laquelle la deuxième partie de ce texte reviendra).
Les calculatrices peuvent contribuer à l'évolution des démarches de l'enseignement mathématique par l'introduction de nouveaux types de solutions des problèmes, par l'importance donnée au calcul mental et au calcul des ordres de grandeur, par l'utilisation des puissances de dix pour écrire les grands nombres, par la réflexion sur la précision des calculs obtenus après l'emploi de valeurs approchées intermédiaires.
Les calculatrices peuvent contribuer à l'évolution des méthodes pédagogiques employées comme source d'investigation, comme moyen d'afficher de nouveaux nombres, comme outil utilisé pour des essais multiples ou des calculs répétitifs, comme moyen de vérification de calculs par une autre méthode puisque l'accès à un résultat est rapide.
Les calculatrices permettent de travailler à partir de situations réelles, avec des résultats expérimentaux, des résultats statistiques ... Il est ainsi possible, avec cet outil, de proposer aux élèves de véritables activités interdisciplinaires.
Il faudrait cependant se garder de voir dans l'utilisation des calculatrices "la solution" aux difficultés que l'enseignement peut rencontrer : simplement, il est vain de continuer dans les faits à proposer des activités qui ne tiennent pas compte de l'existence, de nos jours banale, d'outils de calculs performants. Mais il ne faut pas non plus se cacher l'ampleur des transformations impliquées par cette existence : c'est la totalité de l'enseignement du calcul numérique qui est à envisager, et pas seulement la meilleure manière de se servir de calculatrices. C'est le but que poursuit la seconde partie de ce texte, sans qu'il soit possible actuellement de méconnaître son caractère encore incomplet et provisoire. Seules les innovations qui seront tentées seront à même de lui conférer la rassurante solidité exigible pour sa mise en pratique.

2. L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL NUMÉRIQUE

2.1. Généralités

Il serait illusoire de ne traiter que de l'un des aspects du calcul numérique : son enseignement est à envisager **globalement**. Le présent texte fait mention de calculatrices, mais en les incorporant à une démarche d'enseignement dans laquelle calcul mental et calcul à la main, avec papier et crayon, ont tout autant d'importance que le calcul-machine.

Ceci posé, il convient de rappeler ici que les nombres et leurs opérations "s'incarnent" souvent, en représentant des quantités ou des grandeurs qui interviennent dans une situation à traiter.
Cet aspect, abondamment commenté dans le texte sur la proportionnalité publié par la COPREM, sera moins souligné dans le présent texte. Ceci est possible parce que la phase "calcul" dans un traitement a ses règles propres : il est par exemple possible de vérifier l'exactitude d'un calcul indépendamment de sa pertinence, de la même façon que l'on peut relire un texte, pour en vérifier l'orthographe, indépendamment du sens. Mais, de même que l'apprentissage de la langue passe par le travail sur des textes, l'apprentissage du calcul passe par la résolution de questions et le traitement de données.
Cette réserve faite, quant à une complète autonomie du calcul, qui ne serait évidemment pas souhaitable dans l'enseignement, il est presque inutile de souligner la richesse mathématique du calcul numérique, donc l'intérêt que celui-ci peut avoir en soi.
On peut préciser quelque peu cet intérêt, sans anticiper sur les exemples précis qui seront examinés plus loin, en considérant les **situations-problèmes** qui amènent à s'appuyer sur le calcul numérique. En effet, l'évolution de l'enseignement des mathématiques donne, en s'appuyant sur les recherches en didactique, une place prépondérante aux situations-problèmes. Cette place se justifie particulièrement pour :

1) **L'approche et la construction** de nouvelles notions ou de nouveaux outils mathématiques,
2) Le **réinvestissement** des acquis,
3) Les mises en relation de connaissances acquises séparément, et **les synthèses** ainsi justifiées.

Les Instructions Officielles de 1980 pour le Cours Moyen mentionnent ces trois directions. En particulier, l'usage des calculatrices ne prend de réel intérêt pédagogique qu'incorporé à une démarche d'enseignement dans laquelle ces préoccupations interviennent effectivement. Dans l'examen plus détaillé entrepris tout au long de la suite de ce texte, cette prise en compte est explicitement indiquée lorsqu'il y a lieu.

2.2. Présentation des premières techniques opératoires sur les entiers

La maîtrise parfaite des "quatre opérations" effectuées sur papier n'est plus de nos jours une nécessité absolue en soi, puisque le cas échéant la machine peut jouer un rôle de "prothèse pour le calcul". Il n'est donc pas très important d'atteindre une grande fiabilité dans l'exécution sur papier des opérations : en cas d'urgence, on pourrait se procurer pour une somme modique (quelques paquets de cigarettes) une calculette à la boutique du coin.
Il est cependant important d'acquérir des **méthodes de calcul numérique**, et les opérations arithmétiques constituent les premiers exemples systématisés d'algorithmes, c'est-à-dire de suites rigoureusement définies d'opérations élémentaires. Par ailleurs, la numération de position s'est imposée parce qu'elle se prête bien aux techniques opératoires (incomparablement mieux que la numération latine par exemple) ; son acquisition va donc de pair avec le fait d'effectuer des opérations.
Élaborer et mettre au point un algorithme est en soi une activité intellectuelle formatrice. Or, actuellement, l'apprentissage de la numération au CP et les techniques opératoires aux CE et CM sont les seules occasions, dans la plupart des classes, de fabriquer des algorithmes et de les faire fonctionner. D'autres algorithmes pourraient pourtant être utilisés (algorithmes de constructions géométriques par exemple). L'introduction de l'informatique à l'école modifiera sans doute ce fait et ce que nous disons ici n'a qu'une valeur provisoire.
Même si une calculette donne instantanément le résultat d'une multiplication ou d'une division, on peut se demander, à divers niveaux de la scolarité, suivant les possibilités des enfants comment on pourrait trouver le résultat si on n'avait pas de machine. L'important n'est pas alors d'apprendre une technique mais de trouver un moyen d'obtenir un résultat.
Les instructions officielles actuelles proposent d'ailleurs une approche des techniques opératoires qui va dans ce sens.
Avant d'aboutir à la technique habituelle on pourra pour chaque opération envisager d'autres techniques qui peuvent constituer des étapes intermédiaires.
Il s'agit en fait de permettre aux enfants de s'approprier, en l'élaborant eux-mêmes, une méthode de calcul qui s'affinera progressivement, et non de leur faire apprendre le mécanisme d'une technique unique. Cette phase d'apprentissage ainsi conçue peut être d'une extrême richesse : elle constitue un lieu privilégié de réinvestissement des notions acquises ou en cours d'acquisition concernant le numérique et plus particulièrement la numération.
En effet, une réflexion, qui remonte maintenant à une vingtaine d'années a conduit à donner autant d'importance à la compréhension du pourquoi des techniques opératoires courantes qu'à leur bonne exécution. Il est aujourd'hui intéressant de **prolonger** cette réflexion en tenant compte de l'existence des outils

de calcul actuel. Voyons par exemple le cas de l'introduction de l'algorithme de la multiplication.

«La justification de ces techniques nécessite un travail de transformation d'écritures ; à cet effet, il est indispensable que les enfants sachent quelles sont les transformations licites, c'est-à-dire sachent mettre en œuvre certaines propriétés des opérations.

Exemple :
235×47
$235 \times (40 + 7)$
$(200 + 30 + 5) \times (40 + 7)$
$[(200 + 30 + 5) \times 7] + [(200 + 30 + 5) \times 40]$

Une telle suite de transformations peut permettre de justifier des techniques de multiplication. Dans cet exemple sont intervenues, l'associativité et la commutativité de l'addition, la distributivité de la multiplication sur l'addition.»

En fait, le travail n'est pas terminé. Il faut encore une fois utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition et l'associativité de la multiplication pour écrire finalement :

$$235 \times 47 = 2 \times 7 \times 100 + 3 \times 7 \times 10 + 5 \times 7 + 2 \times 40 \times 100 + 3 \times 40 \times 10 + 5 \times 40$$

Opérations élémentaires que l'on peut faire mentalement ou en s'aidant d'une table de Pythagore pourvu que l'on ait compris la multiplication par une puissance de dix et que l'on sache faire une addition. Mais il faut bien reconnaître que ce travail de transformation d'écriture est un travail purement formel dont il n'est pas certain que tous les enfants de CE2 aient le goût ou la possibilité.
Une approche moins formelle peut certes être faite : à l'aide d'un matériel approprié (par exemple : matériel symbolisant unités, dizaines, centaines, mille par des petits cubes, des barres de 10, des plaques de 100, de gros cubes de mille, matériel constitué de jetons de couleurs, abaques), on peut facilement abstraire à partir des manipulations une technique pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre de 1 chiffre (quelle que soit d'ailleurs la base de la numération, celle-ci conditionnant seulement le mode d'échange) ou pour multiplier par la base.
Les instructions officielles disent d'ailleurs :
«L'élaboration de techniques opératoires, par les enfants pourra s'effectuer à partir de manipulations ou de représentations.»
Une démarche formelle plus simple conduit alors à la suite de ré-écritures :

235×47
$235 \times 40 + 235 \times 7$
$(235 \times 4) \times 10 + 235 \times 7$

Les opérations 235×4 et 235×7 étant faites soit à l'aide du matériel (machine à calculer élémentaire) soit par une technique papier-crayon si elle est acquise. On pourrait aussi imaginer que le résultat est obtenu par une calculette.
Découvrir et utiliser une technique papier-crayon permettrait aux enfants de comprendre que, bien sûr la calculette donne beaucoup plus vite le résultat, mais que s'ils n'ont pas de calculette, ils peuvent faire fonctionner leur esprit et ils auront aussi le résultat.

2.3. Enchaînements d'opérations

Deux types de difficultés se présentent à l'enfant qui aborde (en général au cours moyen) les problèmes qui se résolvent non par une unique opération, mais par une suite d'opérations :
— la première difficulté, et la plus redoutable, est de **découvrir** la procédure à employer
— la deuxième difficulté est de **décrire** la démarche utilisée.
En effet, même un enfant qui découvre la procédure convenable peut avoir du mal à ne pas la percevoir comme un bloc indissociable, mais au contraire comme une suite de "pas", avec des étapes intermédiaires. Ainsi trouve-t-on souvent chez les élèves des écritures "naturelles" du type :

$$15 + 8 = 23 \times 4 = 92$$

Bien sûr, la disposition verticale des opérations ne soulève pas ces difficultés vis-à-vis de la succession, mais elle ne peut s'incorporer à un texte, comme peuvent l'être des égalités.

Résultas	Calculs
1) 27 + 14 = 41 2) 41 × 28,3 = 1160,3	27 + 14 41 ×23,8 123 328 82 1160,3

"traductions"

La présentation traditionnelle d'une page de cahier partagée en deux : à gauche, les données, raisonnements et résultats et à droite les calculs, est une pratique à même de permettre une prise de conscience du phénomène de succession.
Dans l'exemple présenté, on peut parler de "traduction" d'une partie à l'autre, dans la mesure où si les mots (les nombres) sont les mêmes, la syntaxe (la manière de les agencer) diffère.
Mais en affranchissant du souci d'exécuter les calculs, la calculette permet la programmation (dans l'exemple précédent : un simple enchaînement d'une addition suivie d'une multiplication) soit en évidence, sous le feu du projecteur en quelque sorte. Si l'on rappelle que **les principales difficultés** des élèves en calcul se rapportent d'une part au **sens** des opérations et d'autre part à leur **succession**, et non à l'exécution, cette mise en évidence est très importante.
La description des entrées, au **clavier**, et des sorties correspondantes, à **l'affichage**, disposée selon deux ligne est bien à même de montrer la succession de traitements. Un léger décalage peut servir à exprimer que l'affichage **résulte** d'une maneuvre au clavier :

Affichage	1	15	15	8	23	23	4	92
Clavier	1	5	+	8	=	×	4	=

Cependant, une présentation sans décalage est à la longue plus commode et surtout elle permet, littéralement, de "faire le pont" entre le calcul-machine et l'écriture des égalités mathématiques.

premier "pont" **deuxième "pont"**

A	1	15	15	8	23	23	4	92
C	1	5	+	8	=	×	4	=

1) 15 + 8 = 23
2) 23 × 4 = 92

Correspondance entre une suite de calculs sur la calculette et une suite d'égalités

L'égalité de manipulation réalisable sur la calculette, en déclenchant la première opération directement par la pression de $\boxed{x}$, apparait comme une simple connexion entre les deux "ponts".

connexion

A	1	15	15	8	23	4	92
C	1	5	+	8	×	4	=

(=)

Les mêmes calculs en raccourci

En revanche, l'existence d'un **facteur constant**, ou plus généralement d'un opérateur constant, constitue un obstacle à une traduction automatique : il est nécessaire **d'interpréter**.

A	4	41	41	2	28	28	28.3	1160.3	47572.3
C	4	1	×	2	8	.	3	=	=

premier pont

?

Calcul machine avec facteur constant

1) $41 \times 28{,}3 = 1160{,}3$
2) $41 \times 1160{,}3 = 47572{,}3$

Son interprétation sous forme de deux égalités mathématiques

Ici, la présentation la plus appropriée est celle des tableaux de proportionnalité, la flèche de correspondance traduisant la touche $\boxed{=}$.

Des introductions, comme 2 $\boxed{=}$, qui conduisent à 82, à la suite de la séquence précédente, appuient le bien-fondé de cette présentation sous forme de tableau.

× 41

28,3	1160,3	...
1160,3	47572,3	...

On voit ainsi que les calculatrices sont des outils fabriqués pour **rendre certains services**, mais ne permettent pas de tout faire dans le domaine du calcul. Les opérateurs constants sont suffisamment intéressants en pratique pour être proposés, mais ils empêchent un fonctionnement rigoureusement conforme à l'écriture des égalités mathématiques. A y regarder de près, il en est de même de l'écriture : une écriture mathématique rend certains services, mais pas tous. Nous retrouverons ce phénomène (§ 2.4.) à propos de la simple écriture des nombres, comme : $\frac{93}{40} = \frac{2325}{1000} = 2{,}325$.

L'écriture fractionnaire est plus appropriée à la multiplication, l'écriture décimale à la comparaison et l'addition. Pour les machines, l'introduction au clavier est séquentielle, touche après touche, ce qui fait qu'aucune calculatrice ne permet une introduction conforme à des écritures à plusieurs niveaux, comme :

$$\frac{192}{78 + 167}$$

Le calcul en machine de ce nombre peut être facilité par sa **réécriture linéaire** :

$$\frac{192}{78 + 167} = 192 \div (78 + 167)$$

Le calcul écrit sous la deuxième forme s'effectue directement sur les calculatrices scientifiques. Sur une calculette, une représentation arborescente est un intermédiaire efficace, qui met notamment bien en évidence qu'il est préférable ici d'effectuer d'abord l'addition.

$192 \div (78 + 167)$

arbre du calcul à effectuer

Mais ensuite, ou bien il faut remplacer la division par une multiplication en calculant d'abord l'inverse de 78 + 167, ou bien il faut se servir du registre mémoire. Pour un calcul à peine plus compliqué, du type $\frac{a + b}{c + d}$, l'utilisation du registre mémoire serait impérative si l'on ne voulait pas recopier des résultats.

78 $\boxed{+}$ 167 $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ 192 $\boxed{=}$

Un calcul-machine (note : certaines machines fournissent l'inverse après une seule pression de $\boxed{=}$) d'autres machines font autrement (cf. leur mode d'emploi)

78 $\boxed{+}$ 167 $\boxed{=}$ $\boxed{M+}$ 192 $\boxed{\div}$ $\boxed{MRC}$ $\boxed{=}$

Autre calcul-machine équivalent.

Les deux programmes de calculs présentés font appel à 6 touches opératoires. La touche d'échange $\boxed{x \leftrightarrows y}$ permettrait une simplification sensible. Cette touche existe couramment sur les calculatrices scientifiques, mais pas sur les calculettes. L'annexe "cahiers des charges pour les calculatrices dans l'enseignement" traite de cette question.

78 $\boxed{+}$ 167 $\boxed{:}$ 192 $\boxed{x \leftrightarrow y}$ $\boxed{=}$

Le même calcul sur une machine munie de la touche d'échange.

La question qui vient d'être soulevée amène à dire quelques mots de la **relation** entre différents programmes, différentes **écritures** et les **modèles** de machines perfectionnées.

Il ne serait pas réaliste de vouloir dresser une hiérarchie entre les modèles de calculatrices, de la "moins bonne" à la "meilleure".
Donne-t-on, pour commencer, un appareil de photo ultra-perfectionné à un jeune ? Non, on préfère un appareil robuste et d'un fonctionnement simple ; une fois acquises les sensations de base, la coordination du regard et des gestes, on peut envisager raisonnablement d'offrir des possibilités de réglage plus complexes.

$$\begin{array}{r} 27 \\ +\ 14 \\ \hline 41 \\ \times\ 8{,}3 \\ \hline 123 \\ 328 \\ \hline 340{,}3 \end{array}$$

calcul à la main

Clavier	Affichage
2	2
7	27
Enter	27
1	1
4	14
+	41
8	8
.	8
3	8.3
×	340.3

Présentation touche par touche

C	A
27	22
	27
14	14
+	41
8.3	8.3
×	340.3

Présentation abrégée

Calcul sur calculatrice à pile opérationnelle

Bien que reproduisant de très près le calcul tel qu'il est pratiqué à la main, les calculatrices à pile opérationnelles semblent être de ce point de vue des machines du second niveau. Pour ces machines, une présentation verticale des calculs est meilleure que la présentation horizontale, parce que plus proche du calcul à la main. Ces calculatrices à pile opérationnelle sont d'ailleurs presque toujours des calculatrices scientifiques qui sont à introduire au second niveau d'utilisation.

On pourrait voir, à propos de la simplicité préconisée pour les débuts dans le calcul, une contradiction avec la possibilité d'utiliser des ordinateurs. Il n'en est rien, car pour ces derniers, la complexité à l'utilisation provient essentiellement des logiciels de travail, et non du modèle de la machine.
D'autre part, une différence entre calculatrice tient à leur capacité et non à la richesse des possibilités opératoires offertes. Mais le problème de la **précision** des calculs que l'on effectue sur une machine mérite d'être envisagé tout spécialement, car même s'il est mis en lumière par l'enchaînement de calculs, il déborde nettement cette question. On le verra, le problème de la précision se relie naturellement, lui aussi, aux contenus mathématiques.

	Clavier	15	+	8.5	×	7.2	=	
Affichage	Sans priorité	15	15	8.5	23.5	7.2	169.2	⟵ (15 + 8,5) × 7,2
	Avec priorités	15	15	8.5	8.5	7.2	76.2	⟵ 15 + 8,5 × 7,2

Calculatrices sans ou avec les priorités opératoires

$18x^3 - 4x^2 + 9x - 6 = ((18x - 4)\ x + 9)\ x - 6$

"Schéma" de Horner pour le calcul des valeurs d'un polynome

$x\ \boxed{M+}\ \boxed{\times}\ 18\ \boxed{-}\ 4\ \boxed{\times}\ \boxed{MRC}\ \boxed{+}\ 9\ \boxed{\times}\ \boxed{MRC}\ \boxed{-}\ 6\ \boxed{=}$

Calcul (x à choisir) sur une machine sans priorité opératoire

Liées à la fois aux conventions (priorités) d'écriture mathématique et à la "logique" de calcul des machines, les questions de parenthésage conduisent à différentes questions au niveau des collèges.
Aussi en est-il du schéma de Horner conduisant à réécrire un polynome de façon à optimiser les calculs de valeurs à la machine. Dans le présent texte, seul un exemple est présenté. Le lecteur qui voudrait aller plus loin peut consulter avec profit différents ouvrages, notamment la brochure n° 31 de l'APMEP intitulée Calculatrices 4 Opérations, 1979 (p. 94, 95).

2.4. Une question délicate : la division

L'algorithme de la division pose plus de questions d'enseignement que celui de la multiplication. D'une présentation moins facile, encore que certains maîtres savent bien la mettre en place auprès de leurs élèves, il est aussi d'une exécution plus délicate dans le cas général, avec la nécessité d'une estimation (en tant il y va combien de fois tant ?) à chaque étape. Les avis sont alors partagés, entre les deux positions extrêmes :

— viser à l'acquisition sûre d'une technique de division à la main

— abandonner la division à la main.

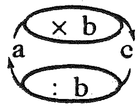
Il a paru prématuré dans le présent texte de trancher entre ces deux positions, ou d'opter pour une position intermédiaire. La question mérite d'être approfondie à l'occasion de l'étude du thème "algorithmes", actuellement entreprise au sein de la COPREM.

En tout cas, ce qui n'est pas à remettre en cause, mais au contraire à développer, c'est **le sens de la division**, et, pour son acquisition dans l'univers du calcul envisagé ici, un certain nombre de techniques de présentation méritent d'être signalées ou rappelées ici.

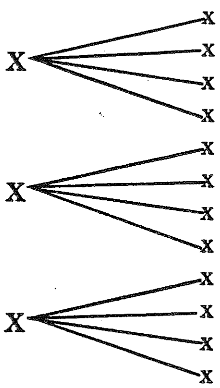
Il faut d'abord comprendre ce que signifie diviser

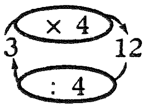
si $a \times b = c$ alors $c : b = a$

ce qui s'exprime plus visuellement par l'écriture

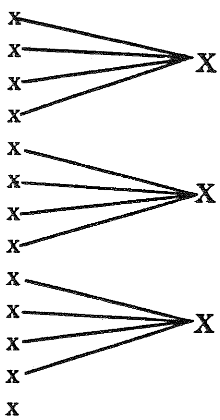


Les enfants de CE2 comprennent bien cette définition de la division qui de plus est celle qui est opérationnelle dans la résolution des problèmes et que l'on peut schématiser par un schéma comme celui-ci.





Diviser 12 par 4 peut être fait en cherchant combien de fois on peut retirer 4 de 12



La division euclidienne relève d'un schéma de même type

$13 : 4 = x$

Le schéma permet de lire

$12 : 4 = 3$

ou

$3 \times 4 + 1 = 13$

Une technique d'approche proposée par les I.O. est celle de soustractions successives.

Paradoxallement en utilisant la technique des soustractions successives, le résultat est plus facilement obtenu si le diviseur est un grand nombre (inférieur au dividende toutefois).

Exemple 1

23574 : 9297

23574 (− 9297)

14277 (− 9297)

4980

Le résultat est obtenu en 2 étapes ; résultat prévisibles, car, si on prend comme unité le millier, $23 : 9 = 2$.

Malgré le peu d'étapes il y aurait intérêt pour ne pas briser la compréhension de l'algorithme à faire les soustractions à la machine.

Exemple 2

23574 : 7

Retrancher 7 serait fastidieux ; on va retrancher d'un coup 1000 fois 7... puis 100 fois 7 etc.

23574 $- 1000 \times 7$

16574 $- 1000 \times 7$

9574 $- 1000 \times 7$

2574 $- 100 \times 7$

1874 $- 100 \times 7$

1174 $- 100 \times 7$

474 $- 10 \times 7$

404 $- 10 \times 7$

⋮ ⋮

Dans l'exemple 1, l'algorithme est facile à comprendre : il s'agit d'une simple **itération**, c'est-à-dire l'application répétée d'une même procédure, appliquée aux résultats successifs qu'elle engendre depuis un point de départ. Ici la procédure répétée est la soustraction de 9297. La seule difficulté est d'éviter toute erreur dans les soustractions, qui sont les **calculs auxiliaires**. Mais c'est précisément un cas où l'utilisation de la calculette est bienvenue.
Voici par exemple une situation-problème (cf. § 2.1.) pour l'approche des notions de quotient et de reste, et son traitement à la calculette.

Situation-Problème | Quatre-vingt-dix ouvriers se présentent à la cantine de l'entreprise pour déjeuner. Ils doivent s'installer par tables de douze personnes...

1 table pour les 6 derniers

Affichage	9	90	90	1	12	78	66	54	42	30	18	6
Clavier	9	0	–	1	2	=	=	=	=	=	=	=

7 tables pleines

L'exemple 2 est conceptuellement plus difficile, bien que l'idée du traitement soit tout simplement d'abréger l'itération qui serait matériellement inexécutable. Il y a un raisonnement à présenter.
Le raisonnement est bien sûr apparenté à celui qui a été indiqué pour la multiplication, comme on le voit sur la présentation synthétique de la division 11045 par 235, réciproque de la multiplication de 235 par 47. Le quotient, 47, se lit directement sur la présentation synthétique.
Quelle que soit la position qui sera finalement adoptée par rapport à l'algorithme traditionnel de division à la main, il apparaît donc important que les élèves sachent entreprendre divers types de recherches de quotient et de reste, dans des situations où le mot "division" n'est pas forcément prononcé. Voici pour illustration une situation-problème à envisager dans une perspective de synthèse (cf. § 2.1.).

Présentation complète		Présentation synthétique	
11045	– 2350	11045	– 2350 × 4
8695	– 2350	1645	– 235 × 7
6345	– 2350	0	
3995	– 2350		
1645	– 235		
1410	– 235		
1175	– 235		
940	– 235		
705	– 235		
470	– 235		
235	– 235		
0			

Division de 11045 par 235

| Si on classe les entiers dans un tableau, de la façon indiquée, dans quelle colonne trouvera-t-on les nombres :
| 1984 ? 10 000 ? 3 333 333 ?

0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..	..

Un calcul sera le suivant si l'on a recours à la calculette.

Nombre traité — quotient : sa partie entière est le quotient entier — réintroduction de la partie entière obtenue

Affichage	1984	1984	1984	7	283.42857	283	283	7	1981	1981	3
Clavier	1984	M+	:	7	=	283	×	7	=	M–	MRC

Dans ce programme les seuls éléments variables à introduire (pour le tableau proposé, qui a 7 colonnes) sont le nombre à traiter et le quotient entier.

2.5 Introduction de nouveaux nombres

Deux façons d'introduire les nombres (relatifs, décimaux, rationnels) ont été pratiquées dans l'enseignement, dans un passé récent :

— l'approche empirique, par extensions progressives des “univers” de travail familier,
— l'introduction par les structures, correspondant à une introduction globale immédiate (après une courte période d'introduction-sensibilisation).

Aujourd'hui, ni l'une ni l'autre ne peuvent être entièrement satisfaisantes. Il est nécessaire, en rapport avec l'idée **d'éducation polytechnique** (voir les réflexions de la COPRET), d'envisager le point de vue technologique, lié aux préoccupations de communication et de traitement.
Comme le paragraphe précédent l'a déjà évoqué, l'homme a élaboré à la fois des techniques d'échange, dont l'écriture, et des machines conçues pour répondre à certains besoins.
L'analyse des services en fonction desquels telle technique ou tel outil a été imaginé et mis au point, voilà une question à explorer. En particulier une calculatrice, et pour commencer une simple calculette, est un **objet d'étude en lui-même**. Une représentation satisfaisante (ce qui ne signifie pas totale) de ce qui se passe en machine est un objectif d'enseignement, et cet objectif engendre le **besoin** d'approfondissements mathématiques.
L'exemple typique qui suit est traité en détail. Pour essayer, ou par hasard à l'occasion d'un calcul mal prévu, un jeune élève peut effectuer sur sa calculette la séquence :

Affichage	3	3	8	− 5
Clavier	3	−	8	=

Quelle peut être la **conduite du maître** qui se verra alors interpeler par le jeune élève ? Dans une approche empirique, cette “découverte” devrait conduire à de nombreux essais supplémentaires pour approcher le phénomène, d'où le risque de s'écarter du programme scolaire prévu. Dans l'introduction des structures, on serait obligé d'évacuer la question pour la réserver au moment où il sera “raisonnablement” possible de faire comprendre au jeune élève (qui aura un peu vieilli) comment on symétrise un semi-groupe (c'est ici un droit du lecteur que de ne pas comprendre cette expression).
Dans l'approche qui mérite actuellement d'être envisagée, on se dira : cela doit **servir à quelque chose**. En effet le phénomène qui apparaît n'est pas un phénomène de la nature comme on peut en rencontrer par exemple en physique, mais il a été voulu, pensé. Pour voir le service qui peut être rendu par ce “− 5”, une idée simple est de **plonger** la “séquence mystérieuse” dans un calcul où elle deviendra en quelque sorte banale, par rapport aux connaissances acquises ; on peut proposer par exemple :

la “séquence mystérieuse”

Affichage	20	20	3	3	8	− 5	− 5	15
Clavier	20	M+	3	−	8	=	M+	MRC

puis

Affichage	5	5	3	8	8	0
Clavier	5	+	3	−	8	=

On est, de la sorte, ramené à un univers simple : celui des **opérateurs additifs**, accessibles dès le niveau du CE2. Sans avoir à introduire la structure des entiers relatifs, on est à même de constater que la calculatrice est prévue pour exprimer que la succession d'une addition de 3 et d'une soustraction de 8 revient à une unique soustraction de 5. On peut dire, à ce niveau scolaire que la calculette délivre des **messages** non seulement sur les nombres, mais sur les opérateurs numériques. Et il est possible alors d'envisager **l'utilisation** de ce traitement d'information : bilan de jeux avec gains et pertes, crédit-débit, évolution diurne d'une température, ...
Par la suite, bien sûr, il y aura à aboutir à l'ensemble des règles qui structurent les relatifs. Mais, comme autrefois, cette structure n'est à présenter qu'au collège. La différence aujourd'hui est qu'au moment de cette présentation, une certaine familiarisation aura déjà pu être proposée.
De l'idée de contrôle peut provenir une autre approche, par la séquence :

$$3\ \boxed{-}\ 8\ \boxed{=}\ 4\ \boxed{=}\ 5\ \boxed{=}\ 6\ \boxed{=}\ 7\ \boxed{=}\ 8\ \boxed{=}\ 9\ \boxed{=}\ ,$$

qui conduit à voir apparaître successivement à l'affichage − 5, − 4, − 3, − 2, − 1, 0 et 1.

Sans entrer dans le détail désormais, mais en imaginant des prises de contact analogues dans leur esprit à celle avec des nombres précédés du signe "–", voici un rapide catalogue des introductions de nombres qui peuvent résulter de l'usage de machines. Pour ce catalogue, on ne se limite pas à la calculette, mais on envisage aussi la calculatrice scientifique ; l'usage prévu s'étend donc de l'école élémentaire au collège.

Introduction de nouveaux nombres :

- Par des touches de la machine :
  Ces touches peuvent permettre, sans opérations, d'introduire en plus des naturels (apparus d'emblée comme des décimaux par leur écriture du type "17."), les négatifs, les décimaux, éventuellement des puissances de 10 (avec l'écriture scientifique des nombres), des approximations décimales de π, d'un radical, ...

- Par des opérations
  Les machines affichent éventuellement :
  — des **négatifs**, par la **soustraction** (type "3 – 8 = ..."),
  — des **décimaux** non entiers, par la **division** (peut-être d'abord par 10, 100, 1000, ..., ensuite par un diviseur quelconque).
  L'affichage peut masquer le fait que le quotient n'est pas décimal. Il peut permettre de conjecturer une période, parfois en faisant apparaître les chiffres de garde. Vérifier la conjecture, ou l'infirmer, est une autre étape.
  — des **puissances à exposant négatif** : des divisions répétées par 10 à partir de 1 feront vite apparaître, sur des calculatrices scientifiques, de telles puissances
  — des approximations décimales de **racines carrées**.

De nouveaux nombres une fois introduits, il est évidemment tentant de les **tester** dans des calculs, et aussi de rechercher dans leurs emplois possibles pour des problèmes courants.

- Critique de l'affichage
  — Si la machine affiche "Erreur" pour "5 $\boxed{:}$ 0" et, tout aussi bien, pour 3 $\boxed{+/-}$ $\boxed{x^y}$ 2 $\boxed{=}$, il faudra bien ne pas accorder les mêmes droits à ces deux verdicts ! Et que dire de l'obtention de 0 après la séquence 0 $\boxed{x^y}$ 2 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$!
  — La machine ignore les représentations décimales illimitées et ne calcule pas dans $\mathbb{R}$, mais dans $\mathbb{D}$, avec autant d'**arrondis** qu'il le faut.
  De là des affichages parfois surprenants.

- Emploi des "nouveaux nombres"
  La machine permet de calculer sur des nombres avant de connaître les algorithmes opératoires sur papier : si 1 m de clôture coûte 37,50 F, quiconque connaît le sens de la multiplication saura calculer le prix de 4 m de clôture, et peut-être même celui de 4,50 m ou 4,80 m.
  Elle privilégie ainsi l'acquisition du **sens des opérations** et sa pratique.

- Structures numériques
  La machine permet d'effectuer $-3-5$ ou $(-3) \times (-5)$ avant de savoir les règles opératoires... Plus généralement, la machine permet de **conjecturer** (donc, souvent, d'accepter) :
  — les **règles d'addition ou de multiplication** de deux décimaux,
  — diverses **propriétés** classiques :
  $a - b = a + (-b)$; $a : b = a \times \frac{1}{b}$; $m(a + b) = ma + mb$; ...

Fractions et rationnels

Les nombres rationnels exigent d'être considérés d'une façon particulière : ils interviennent en effet sous deux aspects qui s'interpénètrent, mais relèvent de démarches assez différentes, à savoir l'aspect des valeurs* et l'aspect algébrique (les règles de "calcul" sur les fractions). Pour le premier des deux aspects, on a souvent à faire appel à la représentation décimale et à l'idée d'approximation ; pour le second, on se rapporte à de l'arithmétique sur les entiers. Ainsi une fraction comme $\frac{1209}{520}$ sera remplacée plutôt par $\frac{2325}{1000} = 2{,}325$ ou plutôt par $\frac{93}{40}$, qui est irréductible, selon l'étude entreprise.

* *Pour les spécialistes, parler à ce propos de l'aspect topologique serait correct.*

Les calculatrices à affichage sur une ligne ne peuvent afficher de fractions qui exigent une écriture à deux niveaux* (c'est en revanche possible sur ordinateur). Aussi leur utilisation pour les traitements "algébriques" sur les fractions demande-t-elle une gestion préalable. En revanche elles permettent de répondre immédiatement à des questions courantes mettant en jeu les valeurs, et tout particulièrement : l'**égalité** de deux fractions, la **comparaison** de deux ou plusieurs fractions.
Ainsi est-il immédiat de constater que $\frac{31}{34} < \frac{84}{91}$, ou que $\frac{42}{385} = \frac{78}{715}$. Au contraire, la comparaison de $\frac{177\,345}{123\,421}$ et $\frac{514\,953}{358\,375}$ entre dans le cadre d'une véritable **situation-problème**, car la calculette fournit des entre dans le cadre d'une véritable **situation-problème**, car la calculette fournit des valeurs identiques pour les deux divisions des numérateurs par les dénominateurs associés. On peut soit tenter d'obtenir plus de huit chiffres pour le quotient, et il faut pour cela bien savoir manipuler la division, soit se ramener aux "manipulations algébriques", c'est-à-dire déduire la comparaison des fractions de celle des produits $177\,345 \times 358\,375$ et $123\,421 \times 514\,953$. Pour ce faire, l'utilisation de la machine pose problème par dépassement de capacité. Si l'on effectue $177{,}345 \times 358{,}375$ et $123{,}421 \times 514{,}953$ pour éviter ce dépassement, on ne lève pas l'incertitude. Il faut donc utiliser la **distributivité** de la multiplication sur l'addition, par exemple en effectuant : $177\,345 \times (358\,000 + 375) = (177\,345 \times 358) - 1000 + 177\,345 \times 375$. Les multiplications compliquées sont faites à la machine, les additions à la main. On fait de même pour le second produit à calculer.
Quel est l'intérêt pédagogique d'un exemple qui, en soi, peut apparaître comme "pathologique" ? D'une part, il met en évidence que les outils de calcul ne sont pas en eux-mêmes tout puissants : montrer qu'il existe un domaine numérique des traitements "sans histoire" sur une calculatrice donnée et un domaine qui pose problème est faire œuvre éducative ; d'autre part, il fait apparaître par contraste que le domaine dans lequel l'obtention de valeur et la réduction au même dénominateur se recouvrent (pour ce qui est des résultats) est **important** si l'on utilise des calculatrices. Sans machine au contraire, les couples de fractions qui se prêtent directement à la comparaison sont en relativement petit nombre (quelques exemples : $\frac{2}{3}$ et $\frac{12}{18}$, $\frac{78}{82}$ et $\frac{147}{138}$, $\frac{11}{101}$ et $\frac{11}{102}$, $\frac{67}{13}$ et $\frac{68}{13}$, $\frac{1983}{1984}$ et $\frac{1984}{1985}$, ...) ; avant les machines, il fallait donc, pour les élèves qui n'avaient pas d'emblée saisi la relation d'équivalence définissant l'égalité des fractions, se rabattre sur un procédé "mécanique". Lorsque, comme ici avec les machines, **deux** approches sont souvent possibles, la gestion didactique, en rendant l'une ou l'autre approche plus ou moins coûteuse, est à la fois facile à imaginer et fructueuse. Le simple contrôle, sur des exemples numériques, de propriétés telles que $\frac{a}{d} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{d^2}$, ou $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$, ou la vérification de résultats, comme $\frac{4}{67} + \frac{5}{28} = \frac{447}{67 \times 28}$, sont déjà d'un apport positif dans l'apprentissage (la dernière égalité soulève en particulier un problème de précision, quand on la vérifie sur une calculette qui tronque les nombre au-delà du huitième chiffre : le calcul du premier membre conduit à la valeur 0,2382728 et celui du second membre à 0,2382729 ; voir § 2.7. sur précision et contrôle).
Les deux mêmes aspects, algébrique et topologique, se présentent à propos des radicaux. Soit a un nombre positif ; $\sqrt{a}$ se manipule algébriquement comme une variable littérale x, avec l'ajout des propriétés $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$. En utilisant les valeurs approchées, fournies par exemple par une calculatrice, on peut se convaincre sur des exemples numériques que les nombres $\sqrt{a+b}$ et $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ sont en général différents. Plus gréralement, des contrôles et vérifications analogues à ceux pour les fractions peuvent être envisagés.
A un niveau scolaire plus avancé, le calcul sur les puissances offrira à nouveau une situation comparable, avec la difficulté supplémentaire que la valeur approchée d'une puissance résulte le plus souvent de **deux** approximations successives : aussi $2^{1/3}$ est d'abord remplacé par $2^{0,33...3}$ (avec le nombre de 3 fixé sur le registre de travail.

2.6. Variables numériques et fonctions

De même que l'approche des nombres, celle des concepts de variable et de fonction utilisés en calcul numérique peut bénéficier des moyens de calcul actuels. Historiquement, c'est la notion d'**inconnue** (le célèbre "arithme" de Diophante par exemple) qui est apparue la première. Son traitement naturel consiste en des **essais améliorés**. Or les calculatrices sont propices à de telles recherches.
Voici une recherche possible de la valeur de $\sqrt[3]{2}$ (arête** du cube de volume double du cube unité), avec utilisation de la calculette.

---

* *Ceci n'interdit pas un affichage du type a/b qui n'utilise qu'un niveau.*

** *La référence géométrique "justifie" l'utilisation implicite de propriétés de croissance et continuité.*

1) Le nombre $\sqrt[3]{2}$ est compris entre 1 et 2 puisque $2 \times 2 \times 2 = 8$, et $8 > 2$.

2) Essayons 1,5 et, pour cela, calculons $1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5$. Avec la calculette, on obtient 3,375 qui est trop grand.

3) Essayons 1,25, moyenne entre 1 et 1,5. On obtient $(1{,}25)^3 = 1{,}953125$. Le résultat étant proche de 2, c'est que $\sqrt[3]{2}$ ne doit pas être très supérieur à 1,25.

4) Essayons 1,26. On obtient $1.26 \times 1.26 \times 1.26 = 2.000376$. Cette fois-ci on dépasse de très peu la valeur 2.

5) Essayons 1,259. On obtient ... (la suite est laissée au lecteur).

Poussée à ses limites, la calculette fournit la valeur 1,259921. On remarquera qu'il n'y a que sept chiffres : le huitième devrait être un zéro, que la calculette "s'obstine" à oublier malgré son intérêt ici ($1{,}2599210 < \sqrt[3]{2} < 1{,}2599211$). La recherche a commencé par **dichotomie**, mais s'est poursuivie selon des idées d'**approximation**, préfiguration du calcul linéaire, autorisé grâce à la dérivation à un niveau scolaire plus avancé que celui des collèges envisagé ici.
Avant d'être l'objet de traitements standards, d'autres situations sont d'abord des situations-problèmes, à divers niveaux scolaires, relevant d'une telle approche ; ainsi : $x^2 = a$ (contrôlable par la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$), $x^3 = a$, $x^b = a$, $b^x = a$ (les nombre a et b sont à choisir). Par la suite, certaines démarches seront codifiées en méthodes.
La notion de **variable** proprement dite est souvent plus simple que celle d'inconnue, bien que d'apparition plus tardive dans l'histoire des sciences. La description d'une calculette, avec ses registres couramment désignés par x et y (voir la brochure APM n° 31 déjà citée, ou l'annexe du texte de la COPREM sur la proportionnalité), est une introduction envisageable ; mais il faut prendre garde au fait que les variables d'un énoncé (qui sont les véritables variables du mathématicien comme de l'informaticien) sont souvent mal prises en compte par les registres x et y (qui sont en fait des adresses). Pour s'en convaincre, il suffit d'imaginer l'évolution des contenus des registres x et y lors des manipulations qu'implique un travail, sur un tableau de proportionnalité par exemple. Considérons le tableau présent, avec la consigne de trouver les deux valeurs placées ici entre parenthèses. Dans ce cas, l'utilisation d'une machine ne serait pas nécessaire pour trouver 74, mais fait gagner du temps pour l'obtention de 462,5. On peut donc imaginer, ce qui est **didactiquement intéressant**, de faire des calculs entièrement sur calculette : ceci permet de **vérifier** l'obtention effective de 74 en cours de calcul. Ces calculs ont été présentés accompagnés de l'évolution des registres d'une calculette d'un modèle courant : on voit que, rapidement, le coefficient multiplicatif constant 9,25 reste dans un registre, alors que le second registre contient alternativement des valeurs des variables M et P.

M (masse en kg)	4	8	50
P (prix en F)	37	(74)	(462,5)

× 9,25

Correspondance $P = \frac{37}{4} M = 9{,}25\ M$

(entre parenthèses : ce qui est supposé non donné)

x	37	37	4	9,25	9,25	8	74	50	462,5
y		37	37	4	9,25	9,25	9,25	9,25	9,25
Clavier	37	÷	4	=	×	8	=	50	=

Évolution des contenus de x et y lors de calculs sur une calculette

D'où la prudence à recommander pour éviter de mélanger **variables** et **adresses** (ici deux registres, que les maîtres qui ont expérimenté ont généralement désignés sous le nom de "boîtes" auprès de leurs élèves). L'ordinateur, qui oblige à envisager différents types de variables, risque moins que la calculatrice de conduire à la confusion mentionnée.

Les fonctions numériques

Les fonctions ont été évoquées dans la première partie de ce texte (§ 1.4). Notamment, l'intérêt de l'utilisation des divers points de vue possibles sur une fonction a été souligné. Afin de préciser, voici un exemple de connexion entre un programme de calcul et un tableau de valeurs. On considère la fonction numérique f déterminée par la séquence (pour calculatrice scientifique) :

$$x\ \boxed{x^2}\ \boxed{+}\ 1\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}$$

où x est un nombre à choisir.

Construisons un tableau des valeurs de f(x) obtenues à la calculatrice pour x entier entre 4995 et 5005. Que la calculatrice affiche huit ou dix chiffres n'importe pas ici : on obtient le tableau indiqué, dans un cas comme dans l'autre. Évidemment ce tableau laisse perplexe, car quiconque le verrait sans idée préconçue dirait que f n'est autre que la fonction déterminée par :

x	f(x)
4995	4995,0001
4996	4996,0001
4997	4997,0001
4998	4998,0001
4999	4999,0001
5000	5000,0001
5001	5001,0001
5002	5002,0001
5003	5003,0001
5004	5004,0001
5005	5005,0001

$$f : x \longmapsto x + 0{,}0001$$

Une telle coïncidence pose évidemment un problème mathématique. Mené à son terme, il s'agit du développement de $\sqrt{x^2 + 1}$ au voisinage de l'infini ou bien de l'égalité obtenue par utilisation de la fameuse quantité conjuguée : $\sqrt{x^2 + 1} - x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

Ici, il n'est donc pas étonnant d'obtenir une différence très proche de $\dfrac{1}{10000} = \dfrac{1}{2 \times 5000}$ au voisinage de x = 5000. Mais sans aller jusque là dans une première approche, on peut voir qu'une calculette fournit le même résultat que les calculatrices scientifiques entre 4995 et 4999, mais fournit $x \longmapsto x$ pour $x \geq 5000$, comme sortie de la séquence : x $\boxed{x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ (une calculette n'a pas de touche $\boxed{x^2}$). Ainsi la valeur à ajouter à x pour obtenir $\sqrt{x^2 + 1}$ semble diminuer quand x augmente (x > 0). Il y a ici mise en évidence à la fois de l'idée clé de **proximité de fonctions** au voisinage de certaines valeurs, et de celle de **pas** lors d'un calcul effectif.

A l'occasion de cet exemple, on voit aussi apparaître de façon très naturelle l'idée de **composition** d'applications, par exemple le fait que $\longmapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est composée de $\longmapsto x^2 + 1$ **suivie** de $x \longmapsto \sqrt{x}$. Le langage algorithmique est en effet idéal pour cette expression. Mais il ne se borne pas à rendre le service de bien convenir pour exprimer des concepts préexistants, il conduit aussi à l'introduction de nouveautés ; l'une des plus importantes est l'idée de **récursion**. Actuellement, cette idée peut donner lieu à des réflexions **en formation des professeurs** : une présentation récursive en fonction rend à nouveau problématiques les propriétés (croissance, continuité, ...), habituellement si familières que les difficultés éprouvées par les élèves peuvent étonner. Une calculatrice programmable permet déjà de traiter des exemples, mais le bon outil* est véritablement l'ordinateur, avec les langages actuels disposant de "procédures". Souvent, les traitements sur papier seraient impraticables, mais il existe tout de même quelques exemples elémentaires permettant d'utiliser ces traitements pour vérifier les résultats de programmes-machine. Un des plus classiques est la fonction factorielle sur les entiers naturels, récursivement définie par

$$0\,! = 1$$
$$n\,! = n \times [(n - 1)!]$$

Voici deux exemples qui introduisent, davantage que factorielle, dans le monde de la récursion. Le premier, n'utilisant que des additions, se traite facilement sur le papier ; le second fait appel à la multiplication, donc "exige" pour les calculs des traitements à la machine. Répétons qu'ils figurent ici à titre d'exercices pour les professeurs.

Exemples de définitions récursives de fonctions

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$f(x) = f(f(x + 110)) \quad \text{si } x < 100$$
$$f(x) = x - 100 \quad \text{si } x \geq 100$$

2) $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$g(x) = g(g(5x/2)) \quad \text{si } x < 1$$
$$g(x) = x/2 \quad \text{si } x \geq 1$$

Questions à envisager : calculs de valeurs (f (90), f (85), ..., g (0,8), g (0,2097152), ...), représentation graphique de f et définition de f par des formules explicites, étude de la restriction de g à]0 ; 1[(valeurs atteintes notamment), ...

D'un abord plus simple que la récursion est le calcul **itératif**. Il est naturel d'envisager sa présentation auprès des élèves, en particulier lors de l'introduction des **suites numériques**. Comme pour les fonctions, l'effet d'apprentissage résultant de confrontations est important.

* *Ceci principalement parce qu'une calculatrice programmable exige que l'on utilise une* variable de gestion *(le nombre de fonctions à composer, à suivre lors du calcul) ; une telle variable est d'une difficulté connue des didacticiens.*

Exemple. Soit n un entier naturel. L'empilement illimité de radicaux

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \ldots}}}$$

détermine-t-il un nombre, et si oui lequel ?

Étude à un niveau d'approche : On envisagera la question pour quelques valeurs de n. Un programme de calcul pour réaliser un empilement fini de radicaux est le suivant, si le nombre de radicaux est p :

$$n \; \boxed{\sqrt{\;}} \quad \boxed{+} \; n \; \boxed{=} \; \boxed{\sqrt{\;}}$$

à répéter (p-2) fois

(**Note :** On travaille "à l'envers", par rapport à l'écriture, comme pour composer des fonctions)

Pour quelques valeurs de n, on s'aperçoit qu'il semble chaque fois y avoir une convergence rapide (à ce niveau, un élève qui utilise une calculatrice dira plutôt que "très vite, le résultat ne change plus quand on répète la séquence"). Un tableau de valeurs des résultats stables ainsi obtenus pour diverses valeurs de n peut permettre de conjecturer que le nombre cherché "évolue" comme $\sqrt{n}$, sinon même de conjecturer sa valeur précise : $\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + n}$, pour $n > 0$.

Étude ultérieure. Le programme itératif de calcul fournit les valeurs successives de la suite récurrente

$$\begin{cases} u_o = \sqrt{n} \\ u_{p+1} = \sqrt{n + u_p} \end{cases}$$

La limite précédemment indiquée et la rapidité de convergence (par comparaison avec une convergence de suite géométrique) s'expliquent alors de manière "classique".

2.7. Précision et contrôles

Dans son plein sens actuel, le contrôle désigne à la fois :
— les procédures de vérification et de mise à l'épreuve de résultats,
— la pratique des variations systématiques des entrées d'un traitement afin d'observer les sorties qui en résultent.

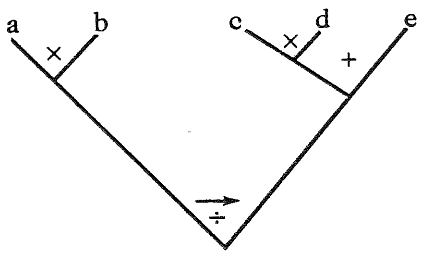
Depuis toujours, on sait que la reprise pure et simple d'un traitement est un moyen de vérification dont l'efficacité est limitée. Il est beaucoup plus fructueux, quand c'est possible, de changer de technique ou de procédure pour procéder à une vérification. C'est ainsi que l'on avait autrefois recours à la "preuve par 9" (calcul dans les entiers modulo 9), ou que l'on effectuait les additions de piles de nombres une fois de haut en bas puis une fois de bas en haut. Loin de supprimer de telles pratiques, l'usage d'outils de calcul en renforce l'intérêt. Ainsi l'introduction de données selon des ordres différents conduit à une réflexion mathématique en même temps qu'à des possibilités de vérification.

Exemple. Calcul de $A = \dfrac{9876 \times 5432}{1984 \times 1985 + 46864}$

bien sûr, un tel calcul s'effectue aujourd'hui en utilisant une machine. Considérons les traitements possibles sur une simple calculette, en remarquant tout d'abord que l'expression à calculer étant de la forme :

$$\frac{ab}{cd + e},$$

l'"arbre" des calculs à effectuer est forcément le suivant :



Malgré le caractère canonique de l'ordre dans les calculs, plusieurs procédures peuvent être envisagées qui respectent le fait que seuls les nombres a, b, c, d, e soient introduits, et chacun une fois.

a) Si l'on n'utilise pas de registre mémoire, le calcul passe par l'obtention de l'inverse de (cd + e). Comme ce nombre est grand, le résultat est assez désastreux ; précisément, la séquence :

$$1984 \boxed{\times} 1985 \boxed{+} 46864 \boxed{=} \underbrace{\boxed{\div} \boxed{=} \boxed{=}}_{\text{obtention de l'inverse}^{*}} \boxed{\times} 9876 \boxed{\times} 5432 \boxed{=}$$

conduit au "résultat" : $\boxed{A = 10{,}729286}$

b) La même séquence, mais avec la "simplification" par 1 000 000 du numérateur et du dénominateur de A, c'est-à-dire :

$$1.984 \boxed{\times} 1.985 \boxed{+} 0.046864 \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{=} \boxed{=} \boxed{\times} 9.876 \boxed{\times} 5.432 \boxed{=}$$

conduit à : $\boxed{A = 13{,}461735}$

c) En inversant seulement à la fin, par : $1984 \boxed{\times} 1985 \boxed{+} 46864 \boxed{\div} 9876 \boxed{\div} 5432 \boxed{\div} \boxed{=} \boxed{=}$,

on obtient : $\boxed{A = 13{,}46174}$

d) L'utilisation de la mémoire permet, sans simplification, d'obtenir le même résultat qu'en b, à l'issue de la séquence :

$$1984 \boxed{\times} 1985 \boxed{+} 46864 \boxed{=} \boxed{M+} 9876 \boxed{\times} 5432 \boxed{=} \boxed{\div} \boxed{MRC} \boxed{=}$$

e) Si l'on veut encore gagner (un peu) en précision, il faut payer comme prix le fait de noter des résultats intermédiaires. En effet, le numérateur et le dénominateur de A se trouvent être divisibles par $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$, d'où : $A = \dfrac{9876 \times 5432}{1984 \times 1985 + 46864} = \dfrac{53\,646\,432}{3\,985\,104} = \dfrac{1\,117\,634}{83\,023}$.

Ce dernier quotient conduit à : $\boxed{A = 13{,}461739}$

(Un calcul avec dix chiffres, sur une calculatrice scientifique, aboutit à la valeur 13,46173951).

Un tel exemple, ainsi examiné assez complètement, pourrait presque suffire à lui seul à apaiser les craintes, sur les "pertes" que l'usage de calculatrices engendrerait. On pourrait être tenté d'objecter à cet exemple que le traitement proposé est effectué sur des machines peu performantes. Ceci n'est pas une objection fondée, car l'argumentation en précision ne fait que reculer les problèmes, sans les faire disparaître. L'exemple proposé par J. VIGNES dans le numéro d'avril 1984 de la Gazette des Mathématiciens est à cet égard édifiant. Il s'agit d'un "brave" polynome de degré 4 en deux variables x et y ; on se propose de calculer sa valeur pour des valeurs des variables de l'ordre de 10 000 ... Voici exactement cet exemple.

Exemple. Calcul de (P (x_0, y_0) pour

$$P(x, y) = 9x^4 - y^4 + 2y^2$$
$$x_0 = 10\,864$$
$$y_0 = 18\,817$$

L'utilisation d'une calculatrice scientifique pour calculer (P (x_0, y_0), écrit sous la forme donnée ou sous la forme

$$P(x, y) = 9x^4 - y^4 (y^2 - 2),$$

avec bien sûr l'utilisation de la touche $\boxed{x^2}$ deux fois plutôt** que la touche $\boxed{y^x}$ pour calculer une puissance quatrième, conduit à des valeurs de l'ordre de − 10 000 000 comme de l'ordre de 10 000 000 (ceci dépend des machines). En revanche, un élève de collège est capable (en principe) d'écrire :

$$P(x, y) = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2.$$

Et à l'issue du calcul correspondant, une calculatrice scientifique usuelle affiche le résultat exact qui est

$$P(x_0, y_0) = 1.$$

Ainsi, l'utilisation de l'identité $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$, pour $A = 3x^2$ et $B = y^2$, a permis ici non la factorisation totale classique (pour résoudre des équations) mais un **abaissement de l'ordre de grandeur** des nombres à traiter. C'est exactement ce qui a été visé dans la séquence b de l'exemple précédent, avec d'autres moyens qu'ici.

* *Sur certaines calculatrices, l'inverse résulte de la séquence* $\boxed{\div}\boxed{=}$, *au lieu de deux pressions de* $\boxed{=}$, *la première pression conduisant à la valeur 1.*

** *Souvent on ne verra pas de différence à l'affichage entre par exemple 10864* $\boxed{x^2}\boxed{x^2}$ *et 10864* $\boxed{y^x}$ *4* $\boxed{=}$, *mais il y a une différence sur les chiffres "de garde".*

Puisque la question de précision peut se poser sur toute machine traitant des nombres décimaux avec prise en compte d'un certain nombre, bien déterminé, de chiffres significatifs, il est bon de l'aborder pour commencer avec des calculettes : ainsi la mise en évidence ne nécessite pas d'envisager des nombres excessivement grands ou petits par rapport à ceux que l'on rencontre usuellement. A titre d'exemple, envisageons une situation où se présente un problème de gestion intéressant à proposer à de jeunes élèves.

Exemple. Utiliser une calculette pour obtenir la valeur de

$$13\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13.$$

Que l'on ne s'étonne pas si beaucoup d'élèves commencent ce calcul par 1 $\boxed{\times}$ ... En effet, il est normal, lorsque l'on s'engage dans un traitement, de ne pas chercher à le regarder au second degré pour voir s'il est améliorable en durée et nombre d'opérations : ici, on "part" pour calculer avec la machine. Mais un obstacle se présente après l'introduction de la multiplication par 11 : en effet, on obtient 39 916 800, c'est-à-dire un nombre qui occupe tout l'affichage. L'essai auprès d'élèves fait apparaître que, dans un tel cas de blocage apparent, la tendance spontanée fréquente est d'**abandonner** l'outil qui s'avère insuffisant, pour travailler sur papier. On peut dire :

1) que c'est déjà faire œuvre éducative que de "démystifier" les machines, en proposant des situations non directement traduisibles en traitements tout faits.
2) que le traitement qui peut paraître évident, à savoir de diviser 39 916 800 par 100 avant de multiplier par 12 puis par 13, ce qui conduit à 62 270 208 et donc à 13 ! = 6 227 020 800 ; correspond à une assimilation **plus poussée** que la prise de conscience des limitations des machines.

Si la prise de conscience des limitations est assez simple à mettre en évidence auprès des élèves, il n'est pas sûr qu'il soit possible aisément d'apprendre à la plupart d'entre eux à les dépasser. Combien d'élèves de lycée aujourd'hui seraient capables d'utiliser une calculatrice scientifique, limitée à des nombres inférieurs à 10^{100}, pour obtenir

$$71\,! = 8{,}50478587 \times 10^{101}\ ?$$

C'est pourquoi, on peut avancer que **l'éducation ou contrôle** est une préoccupation qui devrait intervenir tout au long de l'enseignement. Elle peut être introduite par des situations comme la suivante.

Exemple d'une situation-problème du type "atelier-jeux" pour l'école élémentaire

7	70	147	252
189	196	14	35
56	21	325	49
245	63	28	42

Il y a une erreur dans le carré ci-contre pour qu'il soit un carré de produits magiques...
Trouver cette erreur (avec l'aide de la calculatrice bien sûr).

Dans les exemples qui précèdent, on a pu voir comment poursuivre une telle éducation à des niveaux scolaires variés. Dans les classes terminales des lycées, on peut viser à obtenir une **gestion de la précision nécessaire** pour atteindre un certain résultat.

Exemple de situation-problème exigeant de gérer une précision

Le polynome :

$$P(x) = 60x^4 + 120x^2 - 261x + 79$$

a-t-il des zéros ?

Le polynome dérivé P'(x) n'a qu'un zéro. L'encadrer par 0,6 et 0,7 s'avère ne pas suffire. Pour conclure, il est nécessaire de pousser sa recherche, par exemple par la méthode de Newton, jusqu'à la décimale suivante. On voit alors, en effectuant le calcul de valeurs pour P(x) que le minimum de P(x) est certainement négatif. Il y a donc deux zéros pour P(x).

Ainsi y a-t-il lieu d'examiner si un certain nombre de questions n'ont pas été considérées traditionnement comme trop difficiles au niveau des lycées, simplement parce que leur résolution exige une bonne précision des calculs. Lorsque l'usage de calculatrices suffit à lever cet obstacle, il vaut la peine de se demander si l'intérêt de telles questions ne les place pas sur les rangs des situations de recherche proposables aux élèves. Voici un exemple dont l'intérêt principal est de nécessiter la prise en compte des **ordres de grandeur** en cours de recherche. La généralisation de cet exemple est le fait qu'étant donné un nombre quelconque entre 0 et 1, on peut l'approcher d'aussi près que l'on veut par la partie fractionnaire d'une racine carrée d'entier (mathématiquement, on dit que les nombres de la forme $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, pris modulo 1, sont partout denses dans $[0, 1[$).

Exemple de situation-problème de réinvestissement (cf. § 2.1.)

Chercher un entier n tel que les trois premiers chiffres après la virgule de $\sqrt{n}$ soient 5, 6 et 7 dans cet ordre. Autrement dit : FRAC $(\sqrt{n})$ = 0,567... De préférence, indiquer le plus petit entier qui convient.

Une démarche de recherche est de songer à écrire $\sqrt{n} = p + 0{,}567 + \in$, avec p entier et $\in < 1/1000$. L'élévation au carré permettra de déduire, grâce à l'égalité $(0{,}567)^2 = 0{,}32...$, que :

$$\frac{567}{500}\,p = \frac{67}{100} + q\text{, avec q entier.}$$

Bien que (mystérieusement) l'algorithme d'Euclide ait disparu des actuels programmes des lycées, l'équation diophantienne :

$$567\,p - 500\,q = 5 \times 67$$

est facile à résoudre, avec sa solution évidente $p = q = 5$. On est ainsi amené à : $(5{,}567)^2 = 30{,}99...$, ce qui fournit donc $n = 31$. La vérification machine : $\sqrt{31} = 5{,}567...$ est immédiate.
Hors les mathématiques, mais en rapport étroit avec elles, la reconnaissance des **caractéristiques de gestion** des nombres par les machines est l'une des possibilités autorisées par le contrôle. En général, les calculettes travaillent par **troncature**, au delà du huitième chiffre, tandis que les calculatrices scientifiques travaillent par **arrondi**, avec, dans leurs registres numériques, plus de chiffres que l'affichage de la mantisse n'en fait apparaître à l'utilisateur. Ces chiffres cachés sont nommés "chiffres de garde". A partir d'une division bien choisie (c'est là où il y a contrôle), ces caractéristiques d'utilisation, importantes pour les calculs, peuvent facilement être mises en évidence. Une division classiquement utilisée est celle de 2 par 3. Selon les calculatrices, l'affichage résultant se termine soit par 6, soit par 7. Dans le premier cas, on pense a priori qu'il y a traitement par troncature, mais il peut y avoir tout de même des chiffres de garde. Deux possibilités pour vérifier :

1) soustraire le nombre lu à l'affichage, en le réintroduisant
2) multiplier par 3.

S'il y a des chiffres de garde, on ne trouvera pas 0 dans le premier cas et on ne trouvera pas un nombre terminé par 8, mais par 9, dans le second cas.

Conclusion. Une utilisation **systématique** (et non sauvage comme souvent aujourd'hui) des outils actuels de calcul correspondra dans l'enseignement comme c'est déjà le cas au niveau de la recherche, à une mise en œuvre de l'**ensemble** de nos techniques de calcul : mental, algébrique, littéral, approché, ... De plus, on est en droit d'attendre alors que ces techniques perdant aux yeux des élèves le caractère de brimades gratuites qu'elles revêtent à l'extrême, pour apparaître comme des moyens de répondre à des problèmes contemporains, en y investissant une culture vivante et non momifiée.

2.8. Quelques indications de progression et d'évaluation

Les programmes actuels de l'école élémentaire proposent une progression satisfaisante dans l'ensemble. Seul l'algorithme de la division "à la main" a soulevé une interrogation à laquelle le présent texte n'a pas voulu proposer de réponse définitive. Ce qui apparaît comme important, mais peut-être moins dans les textes que dans les faits, est l'utilisation très fréquente des calculatrices, **en parallèle** avec les autres techniques et moyens de calcul. Dès le cycle pré-élémentaire, des exploitations sont possibles, par exemple pour ce qui est du graphisme : l'aspect des chiffres en affichage "7 - segments" sur une calculatrice peut être mis en évidence. Sans même faire de calculs, on peut jouer sur l'écriture des nombres de manière instructive et distrayante pour des élèves du cours élémentaire : il est maintenant "classique" de renverser une calculatrice affichant par exemple 51380 pour lire OBEIS. Mais c'est tout de même bien sûr le calcul qui interviendra le plus fréquemment. En annexe du texte sur la proportionnalité de la COPREM, quelques indications de progression possible dans l'usage de calculettes avaient été données. Dans le cours du présent texte, le parallélisme entre certaines acquisitions opératoires et des manipulations sur calculette a été envisagé. Plus généralement, on peut se soucier d'une progression dans **l'analyse et la gestion d'un calcul**, dont on sait les difficultés qu'y éprouvent beaucoup d'élèves. Voici des propositions dans cette direction :

1) Étude des expressions contenant une addition et une multiplication. Découverte de l'utilisation de parenthèses (quel est le premier calcul à effectuer ?). Les nombres utilisés sont des entiers naturels ou des décimaux positifs.

2) Étude d'expressions plus complexes, présentant plusieurs additions et multiplications. Parenthèses emboîtées. Priorité de la multiplication sur l'addition, permettant de simplifier les écritures. Utilisation de la mémoire d'une calculette.

3) Étude de la distributivité de la multiplication sur l'addition. Programmes de calcul "équivalents" (tels que $a \div (b \times c)$ et $a \div b \div c$). Utilisation du facteur constant sur calculette.

4) Étude d'expressions contenant addition, multiplication, puissances simples (2 et 3). Priorités des opérations.

5) Introduction des nombres relatifs dans les expressions déjà étudiées. Simplification de l'écriture des nombres. Écriture des nombres positifs et négatifs par la calculatrice.

On notera que ces indications concernent la scolarité jusqu'au niveau du cycle d'observation des collèges (classes de 6^e et 5^e). On retrouvera dans les indications d'évaluation que c'est à ce niveau également qu'un certain nombre d'objectifs sont proposés. C'est en effet à ce moment que les diverses écritures de nombres auront été présentées et manipulées. A partir du cycle d'orientation des collèges (classes de 4^e et 3^e), ce sont les traitements de variables et de fonctions numériques qui sont à envisager systématiquement. En parallèle, on passera des calculettes aux calculatrices scientifiques comme outil de calcul individuel courant. C'est d'ailleurs pourquoi on peut envisager de n'étudier qu'à ce niveau scolaire les puissances autres que 2 et 3 ; en contrepartie, les calculs sur les fractions, qui sont les bons "outils" de traitement pour la proportionnalité, peuvent figurer plus tôt qu'en classe de 4^e. Au niveau des lycées, le calcul devrait amener à des réflexions systématiques sur :

1) les algorithmes,
2) la précision et le calcul approché.

Le présent texte a mentionné le parallèle entre ces réflexions et l'étude de la dérivation, des suites, de la résolution d'équations. L'idée générale est d'exploiter dans le cadre numérique les acquis présentés dans un cadre algébrique : **"Pas de formule qui n'ait été utilisée numériquement"**. Encore mieux lorsqu'un problème numérique d'énoncé très simple a pu être utilisé à un niveau d'introduction.

Objectifs dans le domaine du calcul numérique pour la fin de la classe de 5^e.

- Savoir mentalement multiplier et diviser des nombres par 10, 100, 1000, ..., ainsi que par 2, par 5 et leurs carrés.
- Lire et interpréter un nombre affiché, en étant capable de le tronquer ou l'arrondir (extraction d'information).
- Gérer un enchaînement de calculs (parenthèses, exploitation de la distributivité) sur des nombres décimaux relatifs.
- Savoir comparer, ajouter, multiplier deux fractions. Reconnaître en particulier une égalité de fractions.
- Savoir suivre des inégalités lors d'additions et de multiplications. Ainsi, savoir encadrer un produit ab quand on connaît des encadrements de a et de b.

Objectifs dans le domaine du calcul numérique pour la fin de la scolarité obligatoire.

- Être capable d'appliquer, pour des vérifications, des procédures de calcul mental rapide.
- Savoir utiliser l'écriture des nombres sous la forme d'une mantisse et d'une puissance de 10, notamment l'écriture scientifique.
- Gérer des calculs comportant des rationnels, des puissances entières, des radicaux.
- Savoir utiliser des fonctions ($1/x$, cos, sin, en plus de x^2 et $\sqrt{\ }$) dans des calculs numériques.

- Savoir procéder à du calcul exponentiel sous forme d'itération de multiplication (exemple : trouver une procédure de calcul permettant de déterminer en combien de temps double une population qui augmente de 8 % tous les 10 ans).
- Résoudre des équations et inéquations du premier degré en une variable, des systèmes du premier degré en deux variables, à coefficients numériques.
- Pouvoir approcher par une procédure d'essais successifs un résultat non directement accessible, avec une précision relative restant modeste (de l'ordre de 1/100-ème) et dans des cas où la manipulation opératoire des inégalités suffit pour des encadrements. Exemple : approcher $x > 0$ tel que $x^2 (x + 1) = 1000$.

Objectifs dans le domaine du calcul numérique en fin des lycées.

La diversification des sections ne permet pas de proposer une liste unique analogue aux précédentes et les prolongeant. Voici simplement les situations à propos desquelles les objectifs sont à déterminer section par section, dans celles des sections bien sûr où les situations présentées ici ont une place :

- Itération d'un programme de calcul
- Calcul approché avec une précision imposée d'avance ou à donner à la fin
- Exploitation des ordres de grandeurs variés à l'intérieur d'un calcul
- Résolution approchée d'équations par dichotomie, par la méthode de Newton
- Calcul approché d'intégrales
- Résolution des équations du second degré
- Utilisation des diverses fonctions présentes sur une calculatrice scientifique courante
- Utilisation des formules usuelles de trigonométrie
- Calcul sur les nombres complexes
- Calculs statistiques (savoir introduire les données et obtenir les paramètres statiques sur machine)
- Savoir utiliser un générateur pseudo-aléatoire pour simuler des épreuves courantes (pile ou face, dés, ...).

La liste donnée se limite au calcul facile à entreprendre à l'aide (éventuelle) d'une calculatrice scientifique courante. Le traitement général des systèmes linéaires est un traitement de tableaux pour lequel le bon outil, si nécessaire, est l'ordinateur. De même, l'obtention des fonctions dérivées et des primitives font partie du calcul symbolique. Il s'agit donc d'un autre domaine que celui envisagé dans ce texte, même si le calcul symbolique est aujourd'hui à la portée des ordinateurs.

2.9. En guise de conclusion

Une réserve

Dans le texte, ce qui est le plus neuf tient évidemment le plus de place. Il s'agit de l'incorporation des calculatrices à la démarche de l'enseignement. Les aspects plus traditionnels, qu'il s'agisse des traitements numériques ou algébriques, y ont certes leur place, mais donnent lieu à des développements moindres. Il ne faudrait pas s'y tromper : l'essentiel est la mise à disposition des élèves, pour l'apprentissage, de **l'ensemble** des connaissances, savoir-faire et techniques courants dans le monde d'aujourd'hui. Des expérimentations, dont on peut souhaiter qu'elles soient nombreuses à la suite des présentes réflexions, devraient dégager avec plus de précision qu'ici les articulations entre différentes pratiques.

Un constat :

"Les élèves ne savent plus calculer", voilà une ritournelle qui revient souvent. Comparées avec les performances de leurs prédécesseurs, les performances des actuels élèves la démentent. Mais ce qui apparaît néanmoins comme vrai, c'est l'existence d'un **décalage** entre le calcul appris durant la scolarité obligatoire et les besoins actuels en calcul. Ce décalage justifie* la ritournelle ; il serait souhaitable que ce ne soit que provisoire, et qu'au contraire la perspective d'**adéquation** entre ce qui est acquis et ce qui est nécessaire soit proche.

* *à condition d'admettre qu'autrefois, le calcul appris correspondait bien aux besoins de l'époque.*

ANNEXE 1. MATÉRIELS COURANTS EN 1986

Pour fixer le vocabulaire

Divers types d'outils de calcul existent actuellement qui possèdent des caractéristiques différentes, amenant à des champs d'utilisation différents dans l'enseignement. Dans le texte, la terminologie suivante a été retenue pour les désigner. Les modèles très spécialisés (exemple : calculatrices financières) ne sont pas mentionnées ici.

Calculette. Aussi appelée calculatrice quatre-opérations, c'est le modèle le plus simple et le meilleur marché. L'affichage est généralement de huit chiffres, et les opérations arithmétiques ($+$, $-$, $\times$ et $\div$) sont les seules opérations binaires possibles. Actuellement, les calculettes sont presque toutes munies d'une mémoire, d'une touche de racine carrée et d'une touche de pourcentage (au fonctionnement souvent déroutant à priori).

Calculatrice scientifique. La calculatrice scientifique dispose d'un affichage numérique sous la forme d'une “mantisse” et d'une puissance de 10. Elle a une touche d'élévation à la puissance et des touches pour les fonctions mathématiques de base. De nombreux modèles ont un mode “statistique”, pour l'obtention de moyennes et d'écarts-types.

Calculatrice à fonctions programmables. Sur une telle calculatrice, il est possible d'enregistrer une séquence de touches, en mode “programme” ; ensuite, une seule touche permet d'observer l'effet de cette séquence sur toute valeur numérique que l'on introduit, en mode “exécution”.

Calculatrice programmable. Les diverses possibilités de la programmation : répétition bien sûr, mais aussi tests et boucles, sont disponibles sur une telle machine. Lorsque les registres numériques (mémoires) occupent en machine une place autre que les registres de programmation, le nombre de “pas de programme” disponible est fixe. Sinon, plus on utilise de mémoires, moins on dispose de pas de programme.

Ordinateur. L'affichage d'un ordinateur peut être fait sur un écran dans la plupart des cas, avec donc deux “dimensions” géométriques. Mais ce qui caractérise un ordinateur est d'une part l'utilisation de symboles autres que des chiffres (lettres et divers signes) et d'autre part la possibilité d'emploi de langages de programmation à côté du langage-machine : un programme introduit dans un langage de programmation doit en quelque sorte être traduit pour devenir un programme exécutable par l'ordinateur.

★

ANNEXE 2. CAHIER DES CHARGES POUR CALCULETTES

La calculette, ou "calculatrice quatre-opérations", est à la fois un instrument d'usage courant et la première machine à calcul à utiliser à l'école. C'est pourquoi le présent cahier des charges concerne des machines que leur agrément par l'éducation nationale ne confine pas à un usage scolaire, bien au contraire.

1) Caractéristiques de présentation et alimentation

Pour une bonne robustesse, il est bon que la machine soit contenue dans un étui, s'ouvrant comme un carnet pour que la machine y reste à demeure. Ainsi se trouve assurée une certaine protection de l'affichage.

L'autonomie doit être de longue durée. Grâce à l'affichage par cristaux liquides, un renouvellement des piles chaque début d'année scolaire doit être suffisant. L'extinction de la machine lorsqu'elle n'est pas utilisée pendant quelques minutes est nécessaire pour une longévité réelle à l'emploi ; on demandera donc que la machine soit munie de l'arrêt automatique.

Le maniement doit être simple et silencieux. Ceci conduit à préférer les touches aux claviers sensitifs. La taille des touches doit être suffisante, ce qui conduit pour la machine à une longueur allant de 10 à 14 cm et une largeur allant de 6 à 8 cm. Le marquage des touche doit évidemment être indélébile à l'usage. Pour éviter les effets doubles, il faut qu'une touche soit nettement relâchée pour être réutilisable.

Pour la simplicité, le nombre de touches ne doit pas être trop grand. Le clavier de cinq rangées de chacune cinq touches convient très bien. Il autorise notamment la présence de touches de mémoire ; celle-ci peut être continue, mais ce n'est pas impératif.

2) Caractéristiques de traitement des nombres

Les traitements numériques doivent avant tout être simples, ce qui n'exclut pas une certaine richesse de possibilités, en particulier pour les enchaînements de calculs. La simplicité doit d'abord porter sur les nombres en jeu : on se limitera à un affichage de huit chiffres, sans puissances de dix. De plus, pour éviter que les nombres traités diffèrent des nombres affichés, les registres numériques doivent être conformes à l'affichage, sans chiffres de garde. Ceci impose des traitements numériques par troncature.

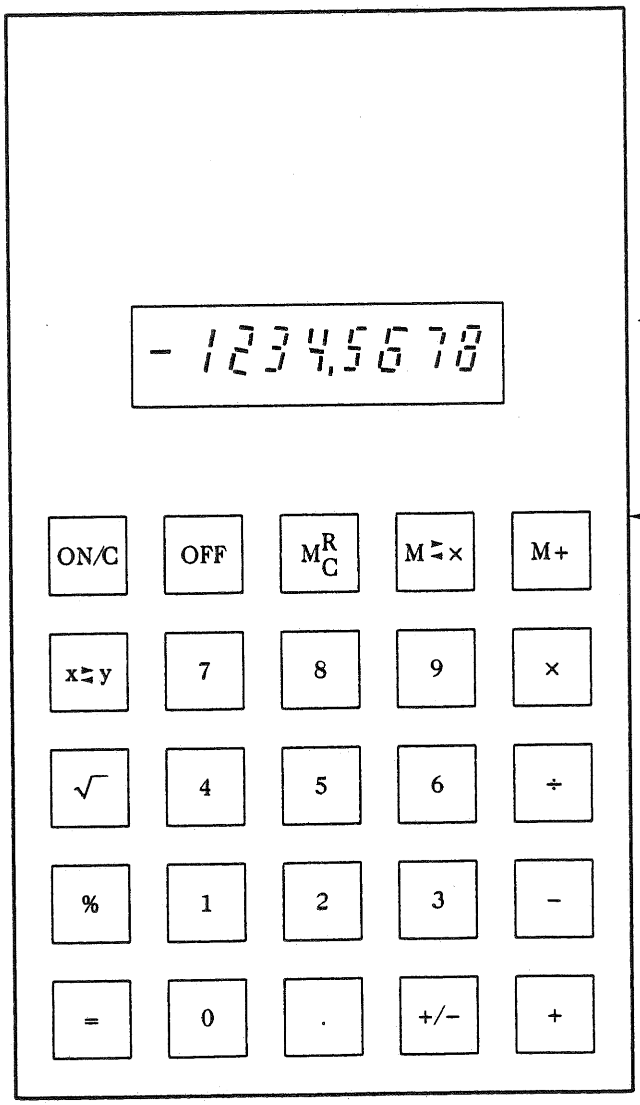
Pour la simplicité des traitements, l'exécution immédiate des opérations convient très bien, associée aux opérateurs constants (facteurs constants et opérateurs additifs constants). Il est inutile que la pression de la touche de division s'accompagne de l'introduction de 1 dans un registre numérique, pour qu'une séquence du type x $\boxed{:}\ \boxed{=}$ fournisse 1/x ; la recopie est préférable comme pour les autres opérations. Des touches d'échange, de la mémoire avec l'affichage et des deux registres numériques entre eux, offrent plusieurs avantages : possibilités de vérifications à tout moment, transparence de la gestion, accroissement des possibilités de traitement d'opérations enchaînées sans réintroductions intermédiaires.

Afin d'illustrer ce texte, un exemple de calculette répondant aux exigences formulées est présenté en annexe. Il est clair que d'autres modèles, différant de celui-ci sur certains points, pourraient être aussi satisfaisants. Les machines agréées pourraient être remises aux élèves comme des livres scolaires, à raison d'une machine par élève pour sa scolarité élémentaire (jusqu'en classe de 5^e^ des collèges).

★

EXEMPLE DE CALCULETTE POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE ET POUR L'USAGE COURANT

Représentée en vraie grandeur



Affichage à cristaux liquides

Clavier de vingt-cinq touches, notamment :

— touche d'allumage-correction de l'affichage

— mise à zéro de la mémoire par deux pressions de la touche de rappel M_C^R

— échange mémoire ⟵⟶ affichage

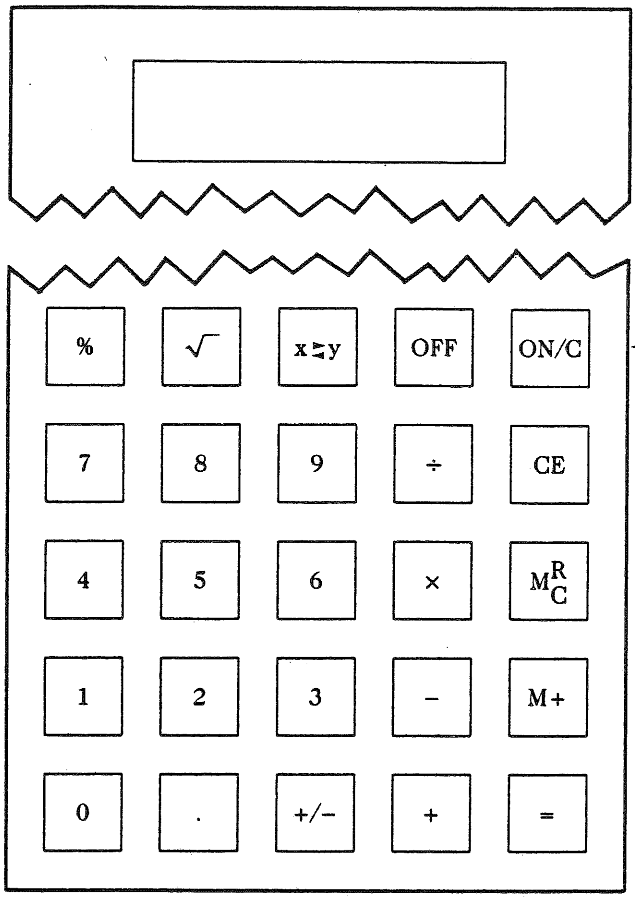
— sommation en mémoire

— échange des deux registres numériques x ⟵⟶ y

- Registres numériques correspondant à huit chiffres décimaux, traités par troncature (pas de chiffres de garde).
- Opérateurs constants.
- Alimentation par piles peu accessibles (tournevis nécessaire), permettant une autonomie de plus d'un an.
- Extinction automatique après quelques instants de non utilisation.
- Éventuellement : mémoire continue.

RÉSUMÉ DU CAHIER DES CHARGES POUR UNE CALCULETTE

CLAVIER ET AFFICHAGE D'UNE CALCULETTE - MODÈLE POUR L'ENSEIGNEMENT JUSQU'EN CLASSE DE CINQUIÈME



Affichage 8 chiffres, cristaux liquides. Résultats tronqués au huitième chiffre.

Pour machines à piles : Extinction automatique après quelques instants de non fonctionnement.
Pour machines à batteries dites solaires : la touche $\boxed{\text{OFF}}$ à remplacer par $\boxed{M \rightleftarrows x}$ (échange entre mémoire et affichage).

Clavier approximativement en grandeur réelle.

"CAHIER DES CHARGES"

Alimentation : Piles ou batteries dites solaires. Pour piles : autonomie $>$ 1 an.

Clavier :
- Touches de tailles suffisantes pour une manipulation aisée.
- La disposition selon 5 rangées de chacune 5 touches est agréable
- La touche $\boxed{+/-}$ est parfois absente, au profit d'une touche $\boxed{M-}$; mais entre ces deux touches, c'est la première la plus intéressante.
- La touche d'échange $\boxed{x \leftrightarrow y}$ entre l'affichage et le second registre existe souvent sur les calculatrices scientifiques, mais en général pas sur les calculettes ; elle ne conduirait cependant pas à des augmentations de prix, et aurait de gros avantages pour les suites de calculs (calculs enchaînés).

Gestion des nombres et opérations :
- Traitements des nombres par troncature au huitième chiffre.
- Opérateurs constants : le premier facteur pour la multiplication, le second terme pour les autres opérations.
- Recopie des nombres de l'affichage dans le registre y sur pression d'une touche d'opération ; exemples (a désigne un nombre à choisir) : a $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ pour obtenir a^2, a $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ pour obtenir $1/a$.